部分分数分解について

真中遥道

2021 年 4 月 30 日

1　部分分数分解

塾講師のアルバイトで有理関数の積分を教えるときに，部分分数分解についてある知見を得た．調べてみたところ割と有名事実みたいだが，自力で証明できたのが嬉しかったので記録を残しておく．ある知見とは次の定理である．

定理 1 (部分分数解)**.** $f(x), g(x) \neq 0$ を $\mathbb{C}$ 上多項式とし，$f(x)$ の次数を m，$g(x)$ の次数を n，因数分解を

$$g(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{\lambda_i} \quad (a \neq 0,\ i \neq j \text{ のとき} \alpha_i \neq \alpha_j)$$

とする．任意の有理式 $f(x)/g(x)$ に対し $a_0, \ldots, a_{m-n}, b_{1,1}, \ldots, b_{k,\lambda_k}$ が存在し，次の形に部分分数分解できる．

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{b_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}.$$

なお $m-n<0$ のとき右辺第一項は空和として 0 とする．

要約すれば，どんな有理関数もいい形に部分分数分解できるということである．これを示そうと思う．多項式は $\mathbb{C}$ 上のものとする．次の三つの定理は既知とする．

定理 2 (除法の原理)**.** 多項式 $f(x), g(x) \neq 0$ に対し，商と呼ばれる多項式 $q(x)$ と余りと呼ばれる多項式 $r(x)$ が存在し次を満たす．

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \text{ かつ } \deg r < \deg g$$

定理 3 (ベズーの等式 (の系?))**.** 共通の根を持たない多項式 $f(x), g(x)$ に対して

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

を満たすような多項式 $u(x), v(x)$ が存在する．

定理 4 (代数学の基本定理 (の系?))**.** 任意の多項式は一次式の積に分解できる．

定理 3 を用いると次が示せる．

補題 5. $f(x)$ を多項式，$g(x), h(x)$ を共通の根を持たない多項式とするとき，ある多項式 $a(x), b(x)$ が存在し次が成り立つ．

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{a(x)}{g(x)} + \frac{b(x)}{h(x)}$$

証明．$u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1$ となる多項式 $u(x), v(x)$ が存在する．$a(x) = f(x)v(x), b(x) = f(x)u(x)$ とすれば $a(x), b(x)$ は多項式で $f(x)/(g(x)h(x)) = a(x)/g(x) + b(x)/h(x)$ を満たす． □

補題 6. 任意の m 次多項式 $f(x)$ と自然数 n，複素数 α に対し複素数 $a_{m-n}, \ldots, a_0, b_1, \ldots, b_n$ 次が成り立つ．

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^n} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(x-\alpha)^i}$$

証明．$f(x) = f_0(x)$ とおく．$i = 0, \ldots, n-1$ について，$f_i(x)$ を $(x-a)$ で割った商を f_{i+1}，余りを b_{n-i} とし，$\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i = f_n(x)$ とすれば $a_{m-n}, \ldots, a_0, b_1, \ldots, b_n$ は上式を満たす． □

補題 5，6 を用いて定理 1 を示す．

定理 1 (部分分数解 (再掲))**.** $f(x), g(x) \neq 0$ を $\mathbb{C}$ 上多項式とし，$f(x)$ の次数を m，$g(x)$ の次数を n，因数分解を

$$g(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{p_i} \quad (a \neq 0,\ i \neq j \text{ のとき} \alpha_i \neq \alpha_j)$$

とする．任意の有理式 $f(x)/g(x)$ に対し $a_0, \ldots, a_{m-n}, b_{1,1}, \ldots, b_{k,p_k}$ が存在し，次の形に部分分数分解できる．

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}.$$

なお $m-n<0$ のとき右辺第一項は空和として 0 とする．

証明．補題 5 を繰り返し用いれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{u_i(x)}{(x-\alpha_i)^{p_i}}$$

を満たす $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ が存在することが分かる．定理 6 により上式の各項 $u_i(x)/(x-\alpha_i)^{p_i}$ は多項式 $v_i(x)$ と $b_{i,j}$ を用いて

$$\frac{u_i(x)}{(x-\alpha_i)^{p_i}} = v_i(x) + \sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}$$

と表せる．よって i について和を取れば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k} v_i(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}$$

となる．$\sum_{i=1}^{k} v_i(x)$ の次数について調べる．両辺に $g(x)$ を掛けると左辺の次数は m である．両辺の次数比較により $m \geq n$ のとき $g(x)\sum_{i=1}^{k} v_i(x)$ の次数は n でなければずず，ゆえに $\deg \sum_{i=1}^{k} v_i(x) = m-n$ となる．また $m<n$ のときは次数の比較により $\sum_{i=1}^{k} v_i(x) = 0$ となる．よって $\sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{k} v_i(x)$ とすれば

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{m-n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p_i} \frac{b_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}.$$

が成り立つ． □

晴れて定理 1 が証明できた．