積分いたしますわよ

真中遥道 (@GirlwithAHigoi)

みなさん，ご機嫌麗しゅう．このプリントでは基本的な積分公式，三角関数の入った関数の積分，分数関数の積分，無理関数の積分，微分接触法を扱いますわ．一緒に頑張りますわよ！
注）本文章は硬い文体にならないように，お嬢様口調を意識した文体で書かれていますわ．
注）積分の基本的な事項や置換積分法，部分積分法は既知のものとしますわ．未習の人，不安な人はそちらの学習，復習を優先してくださいませ．
注）C は特に断らない限り積分定数としますわ．

目次

1　基本的な積分公式

まずは次の基本的な公式を押さえますわよ．

ポイント 1. 基本的な積分公式

$$(1)\ \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1) \qquad (2)\ \int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$$

$$(3)\ \int \sin x dx = -\cos x + C \qquad (4)\ \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(5)\ \int \frac{1}{\sin^2 x} x dx = -\frac{1}{\tan x} + C \qquad (6)\ \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

$$(7)\ \int e^x dx = e^x + C \qquad (8)\ \int a^x = \frac{a^x}{\log a} + C$$

計算すると微分して元に戻ることが確かめられますわ．ためしに (5),(6) が成り立つことを一緒に見てみましょう．

$$\left(-\frac{1}{\tan x}+C\right)' = \left(-\frac{\cos x}{\sin x}+C\right)' = -\frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\tan x + C)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}+C\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

他の公式も一度自分の手で計算して確かめてくださいね．これらの公式はしょっちゅう使うので九九のみたく覚えてくださいまし．

次に積分の性質を押さえますわよ．

ポイント 2. 積分の性質

$f(x), g(x)$ を積分可能な関数，a, b を定数，$\int f(x)dx = F(x)$ とする．次が成り立つ．

$$(1)\ \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(2)\ \int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$(3)\ \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a \neq 0)$$

全て両辺の微分が一致することから正しいことが確認できますわ．(1),(2) を合わせて積分の線形性と言います．この性質はよく使うので馴染み深いと思いますわ．(3) は第 5 節で解説する微分接触法の一種なのですが，よく使うので微分接触法を知る前に知っておくべきですので紹介致しま

したの．これを使うと例えばこんなふうに積分ができますわ．

$$\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(2x+1)^6 + C,$$
$$\int \cos(3x-2) dx = \frac{1}{3}\sin(3x-2) + C.$$

以後，この (3) を使う時にはわざわざこの性質を使っていることには言及しませんので，注意して式をおってくださいませ．

練習問題 1

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2x} dx$　(3) $\displaystyle\int (2\sin 2x - 3\cos 3x) dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$　(6) $\displaystyle\int 3^{2x} dx$

2　三角関数の入った関数の積分

次に三角関数の入った関数の積分方針を見ていきますわよ．三角関数の入った積分で目指すのは,

（ア） 被積分関数を $\sin kx, \cos kx$ の一次式に変形する
（イ） いい置換をする

のいずれかですわ.（ア）は例えば

$$1 + \sin x + 2\cos 3x - 3\sin \pi x$$

のような式のことですわ．累乗がないことがポイントですわね．（ア）ができればポイント 1 の公式で積分ができますわ．実際先程の例であれば

$$\int (1 + \sin x + 2\cos 3x - 3\sin \pi x) dx = x - \cos x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{3}{\pi}\cos \pi x + C$$

と計算できますわ．（イ）をしても結局ポイント 1 を使って積分をすることになりますわ．では，どのように（ア)，（イ）を目指すのか，見ていきますわよ．

2.1　$\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$ の計算方針

$\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$ の形の積分は，n が偶数のときと奇数のときで方法が異なりますわ．
まず奇数の時をみてみましょう．n が奇数の時は（イ）を目指しますわよ．具体的には

$$\sin^n x \cdots t = \cos x, \quad \cos^n x \cdots t = \sin x$$

と置換しますわ．そうすると，n が奇数なので $n = 2k+1$ とおけて，それぞれの場合 $dt = -\sin x dx$，$dt = \cos x dx$ ですので，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ を使うと

$$\int \sin^{2k+1} x dx = \int (\sin^2 x)^k \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^k \sin x dx = -\int (1-t^2)^k dt$$
$$\int \cos^{2k+1} x dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x dx = \int (1-\sin^2)^k \cos x dx = \int (1-t^2)^k dt$$

となり，積分できますわ．具体例を一つ見てみましょうか．次の積分を考えてみましょう．

$$\int \sin^3 x dx.$$

$\sin x$ の奇数乗なので $t = \cos x$ と置換しますわよ．$dt = -\sin x dx$ なので

$$\int \sin^3 x dt = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx = \int (1-t^2)(-1)dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

となりますわ．

次に偶数の時を見てみましょう．n が偶数の時は

- （ア）を目指す
- n が奇数の場合に帰着させる

のいずれかを行いますわ．その時には半角公式

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

が役立ちますわ．例えば

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

となって（ア）の方針で積分ができます．他の例としては

$$\int \sin^6 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx$$

となって，最右辺の初項，第二項はポイント 1 で積分でき，第三項は先の例のように，第四項は奇数乗の場合の方法で積分できますわ．より一般には半角公式を使うことで

$$\sin, \cos \text{ の偶数乗} \longrightarrow \begin{cases} \sin, \cos \text{ の奇数乗} \\ \text{より次数の低い } \sin, \cos \text{ の偶数乗} \end{cases} \quad \text{の式}$$

のように書き換えられ，これを繰り返すことで結局積分できますわ．具体例を一つみてみましょう．次の積分を考えますわよ．

$$\int \cos^6 x dx.$$

$\cos x$ の偶数乗なので半角公式を使って次数下げをしましょう．

$$\int \cos^6 x dx = \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int \left(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) dx$$

各項ごとに見ていきましょう．$1 + 3\cos 2x$ はポイント 1 で積分できますわね．

$$\int (1 + 3\cos 2x)\, dx = x + \frac{3}{2} \sin 2x + C.$$

$3\cos^2 2x$ は cos の偶数乗なのでさらに半角公式を使いますわ．

$$\int 3\cos^2 2x dx = \int 3 \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8} \sin 4x + C.$$

するとポイント 1 を使って積分できましたわね．$\cos^3 2x$ は cos の奇数乗なので $t = \sin 2x$ と置換しますわ．$dt = 2\cos 2x dx$ ですので

$$\int \cos^3 2x dx = \int (1 - \sin^2 2x) \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - t^2) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{3} t^3 \right) + C = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C.$$

以上から

$$\int \cos^6 x dx = x + \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C$$

となりますわ．

今お話しした計算の方針を一旦まとめますわね．

$\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$ の計算方針

n が偶数 $\cdots$ 半角公式を使い次数下げと積分．
n が奇数 $\cdots \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使って $(\sin x$ の式$)\cos x$ か $(\cos x$ の式$)\sin x$ の形にし，
$\cos^n x$ なら $t = \sin x, \sin^n x$ なら $t = \cos x$ と置換する．

2.2 $\int \sin nx \cos mx dx$ の計算方針

次に $\int \sin nx \cos mx dx$ の積分を考えますわ．この積分は（ア）を目指しますわ．この時には積和公式

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right),$$
$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2} \left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right),$$
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right),$$
$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right)$$

が役立ちますわ．これを使うと例えば

$$\int \sin nx \cos mx dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\right) dx$$

と変形でき，ポイント 1 で積分できますわ．

$\int \sin nx \cos mx dx$ の計算方針

積和公式で三角関数の和の形にする．

具体例を見てみましょうか．次の積分をやってみましょう．

$$\int \sin 2x \sin 3x dx.$$

積和公式を使えば

$$\int \sin 3x \sin 2x dx = \int -\frac{1}{2}\left(\cos 5x - \cos x\right) dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x - \sin x\right) + C$$

参考「積和公式の覚え方」

ちなみに積和公式は次のように覚えると導きやすいですわ．まず

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

を覚えますわ．出てくるのは全て cos で，真ん中の符号は $\alpha = \beta = 0$ を考えれば $+$ と分かりますわ．そして他の式を導出したいときは α, β の一方を変数，他方を定数と思い，微分してくださいませ．そうすると他の式も得られますわ．例えば $\sin\alpha\cos\beta$ を導きたければ α を変数，β を定数と思い α で微分すれば

$$-\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(-\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\therefore \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

となって得られますわよ．

2.3 $\sqrt{1+\cos x}, \sqrt{1-\cos x}$ の計算方針

$\sqrt{1+\cos x}, \sqrt{1-\cos x}$ の積分は（ア）を目指しますわ．半角公式を使うと

$$\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|,$$
$$\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

となり，これを積分区間に応じて絶対値を外し積分すれば良いですわ．

$\sqrt{1+\cos x}, \sqrt{1-\cos x}$ の計算方針

半角公式を使う.

2.4　本当に解けない時

これから紹介する方法は少し煩雑で，知らなくてもある程度のレベルまでは問題ないので，余力のない人は飛ばしていただいて構いませんわ．ただこの方法ですと，計算が大変ですけれども，大抵の三角関数の入った積分は解けますわ．紹介するのは次の置換です．

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

まず結果から言いますと，この置換をすると，三角関数の入った関数 $f(\sin x, \cos x)$ の積分は

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

と変形できますわ．例えば $f(\sin x, \cos x)$ が $\sin x, \cos x$ の有理関数であれば，この置換で t の有理式の積分に帰着できますわ．では，この置換の計算を具体的に見ていきましょう．まず $\sin x, \cos x$ は次のような計算で t で表せますわ．

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} &&\text{（倍角公式を使った）}\\
&= 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\frac{1}{1/\cos^2(x/2)}\\
&= 2\tan\frac{x}{2}\frac{1}{1+\tan^2(x/2)} &&\left(1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\text{を使った}\right)\\
&= \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\\
&= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 &&\text{（倍角公式を使った）}\\
&= \frac{2}{1/\cos^2(x/2)} - 1\\
&= \frac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 &&\left(1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\text{を使った}\right)\\
&= \frac{2}{1+t^2} - 1\\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

次に dx は

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2(x/2)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+\tan^2(x/2)}{2} = \frac{1+t^2}{2}$$

より

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

と分かりますわ．これを代入すると

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

を得られますわ．$\sin x, \cos x, dx$ の t での表し方は覚えるのが大変なので，

- $x = 2 \cdot \dfrac{x}{2}$ とみて倍角公式を使う
- $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を使う
- $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を微分して dx を求める

という計算方法を覚えておくと良いですわ．

本当に解けない時

$t = \tan(x/2)$ と置換する．$\sin x, \cos x, dx$ は

- $x = 2 \cdot \dfrac{x}{2}$ とみて倍角公式を使う
- $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を使う
- $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を微分して dx を求める

の方針で t で表す．

具体例を一つみて見ますわよ．

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}dx.$$

$t = \tan(x/2)$ と置換しますわよ．積分区間は

x	0	$\to$	$\pi/2$
t	0	$\to$	1

となりますわね．先の $\sin x, \cos x, dx$ を t で表した結果を用いると，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{2}{2t + 1 - t^2 + 1 + t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t+1}dt \\
&= \Big[\log|t+1|\Big]_0^1 \\
&= \log 2
\end{aligned}$$

となり解けましたわ．

以上が三角関数の入った関数の積分方針ですわ．下にまとめておきますわね．

ポイント 3. 三角関数の入った関数の積分方針

1. $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$
   n が偶数 $\cdots$ 半角公式を使い次数下げと積分．
   n が奇数 $\cdots \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使って $(\sin x$ の式$)\cos x$ か $(\cos x$ の式$)\sin x$ の形にし，$\cos^n x$ なら $t = \sin x, \sin^n x$ なら $t = \cos x$ と置換する．
2. $\int \sin nx \cos mx dx \cdots$ 積和公式で三角関数の和の形にする．
3. $\sqrt{1+\cos x}, \sqrt{1-\cos x} \cdots$ 半角公式を使う．
4. 本当に解けない時（必須ではない）$\cdots t = \tan(x/2)$ と置換する．$\sin x, \cos x, dx$ は
   - $x = 2 \cdot \dfrac{x}{2}$ とみて倍角公式を使う
   - $1 + \tan^2 \theta = \dfrac{1}{\cos^2 \theta}$ を使う
   - $t = \tan \dfrac{x}{2}$ を微分して dx を求める

   の方針で t で表す．

練習問題 2

次の積分を求めよ．

(1)	$\displaystyle\int \sin^2 x dx$	(2)	$\displaystyle\int \sin^3 x dx$	(3)	$\displaystyle\int \sin^4 x dx$
(4)	$\displaystyle\int \sin 4x \cos 2x dx$	(5)	$\displaystyle\int \cos x \cos 3x dx$	(6)	$\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos x} dx$
(7)	$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1+\sin x} dx$	(8)	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$	(9)	$\displaystyle\int \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} dx$

※(8)，(9) を解くには分数関数の積分計算が必要になる．

3　分数関数の積分方針

この節では分数関数の積分方針を説明しますわ．分数関数とは分母分子が多項式の分数として表せる関数のことです．とりあえずまとめたものをお見せしますわ．

ポイント 4. 分数関数の積分方針

1. 割り算をして（分子の次数）<（分母の次数）とになるようにする．
2. 部分分数分解する．
3. 次のいずれかの形に帰着する．

(a) $\dfrac{1}{(ax+b)^n}\cdots$ 積分公式を使うと $\displaystyle\int\frac{1}{(ax+b)^n}dx=\frac{1}{(-n+1)(ax+b)^{n-1}}+C$

(b) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdots\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

(c) $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\cdots$ 平方完成して tan で置換する．

3.1 手順を実感いたしましょう

手順がどのようなものか実感するために，この手順にしたがって数問積分を解いてみますわよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{(2x+1)^2}dx$

(分子の次数) $=1<2=$ (分母の次数) で，分母の因数も一つですので 1,2 は済んでいますわね．次に進んで 3 のどのタイプなのかを見るとこれは (a) ですわね．結果的にポイント 1 の (1) を使うと

$$\int\frac{1}{(2x+1)^2}dx=\int(2x+1)^{-2}dx=\frac{1}{-2+1}(2x+1)^{-2+1}\cdot\frac{1}{2}+C=\frac{-1}{2(2x+1)}+C$$

となって計算ができましたわ．

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x+1}dx$

まず 1 の割り算をしますわ．

$$\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}.$$

するともう 2 は済んでいますわね．最初の二つの項はポイント 1 で解け，三個目の項は 3 の (b) のタイプですね．よって計算すれば

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|+C$$

となって解けましたわ．

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$

(分子の次数) $=1<2=$ (分母の次数) となっているので 1 は済んでいますわ．次に 2 の部分分数分解をすると

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$$

となりますわね．すると 3 の (b) のタイプなので，計算すると

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\log|x-2|-\log|x+1|\right)+C=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$$

となりますわ.

いかがでしょうか．なんとなくどういう手順かお分かりになりましたかね．そうしたら細かい説明に移りますわ手順 2,3 についてお話ししますわ.

3.2　手順 2 について

部分分数分解の基本的な方法はご存知かと思いますので，注意点だけ申し上げますわ．試しに次の分数式を部分分数分解してみてくださいませ.

$$\frac{5x^2+7}{x^3-x^2+x+3}.$$

できますか．ちゃんと自分で一度やってみてくださいね.

…… できましたかね．では，一緒にやってみましょう．分母を因数分解すると $x^3-x^2+x+3=(x+1)(x^2-2x+3)$ となります．x^2-2x+3 は判別式が負なので実数根を持たず，これ以上実数範囲では因数分解できませんわね．これを元に a,b,c を定数として

$$\frac{5x^2+7}{x^3-x^2+x+3}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-2x+3} \quad \cdots\cdots(*)$$

とおきます．分母を払うと

$$5x^2+7=a(x^2-2x+3)+(bx+c)(x+1) \iff (a+b-5)x^2+(-2a+b+c)x+3a+c-7=0$$

となりますわ．これが恒等式となるとき，

$$a+b-5=0,\ -2a+b+c=0,\ 3a+c-7=0$$

が成り立ちます．これを解けば

$$a=2,\ b=3,\ c=1$$

となりますので結果

$$\frac{5x^2+7}{x^3-x^2+x+3}=\frac{2}{x+1}+\frac{3x+1}{x^2-2x+3}$$

と部分分数分解できましたわ．多分できなかった人は $(*)$ ができなかったのではないかと思いますわ．例えば $1/x(x^2+1)(x-1)^3$ であれば

$$\frac{1}{x(x^2+1)(x-1)^3}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx^2+ex+f}{(x-1)^3}$$

と置かなければいけません．$(x-1)^3$ のような一次式の累乗になっているものは

$$\frac{1}{x(x+1)^2(x-1)^3}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{d'}{x-1}+\frac{e'}{(x-1)^2}+\frac{f'}{(x-1)^3}$$

と置いても同じことですので，こちらの置き方をしても構いませんわ．その後で積分することを考えると，むしろ後者の置き方をした方がいいかもしれません．まとめると，部分分数分解する時は次のようにやってくださいね．一般的な書き方で少し分かりにくいかもしれませんが上の例でやったことと同じことを言ってますわ.

部分分数分解

$g(x)/f(x)$ (($g(x)$ の次数) $<$ ($f(x)$ の次数)) を部分分数分解するとき

1. 分母 $f(x)$ を因数分解する
2. $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ を実数範囲でそれ以上因数分解のできない多項式として，分母が $f(x) = f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)$ と因数分解できたら，$a_1, \ldots, a_n$ を定数として

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{a_1}{f_1(x)} + \frac{a_2}{f_2(x)} + \cdots + \frac{a_n}{f_n(x)}$$

とおき，これを満たす $a_1, \ldots, a_n$ を求める．ただしもし因数に l 次多項式 $f_i(x)$ ($l \geq 2$) があれば，$a_i/f_i(x)$ の代わりに $b_1, \ldots, b_k$ を定数として，

$$\frac{b_l x^{l-1} + \cdots + b_2 x + b_1}{f_i(x)}$$

とおく．また因数分解に $(f_i(x))^k (k \geq 2)$ というような冪が 2 以上の因数があれば $a_i/f_i(x)$ の代わりに，$c_1, \ldots, c_k$ を定数として，

$$\frac{c_1}{f_i(x)} + \frac{c_2}{(f_i(x))^2} + \cdots + \frac{c_k}{(f_i(x))^k}$$

と置いてもよい．

3.3 手順 3 について

(a) についてはポイント 1 を用いればできますので割愛いたしますわ．(b) について右辺を微分すれば左辺の被積分関数になることが分かりますわ．

$$(\log|f(x)| + C)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

(c) についてお話ししますわね．まず次の積分を考えてみましょう．

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$x = \tan\theta$ と置換してみましょう．

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

であるので

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \int d\theta$$

となって積分できますわ．($1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ を用いましたわ)

では $1/(ax^2 + bx + c)$ ($a \neq 0$) を積分することを考えてみましょう．先の話から $1/(1 + (f(x))^2)$

の形にして $f(x) = \tan\theta$ と置換すればいけるのではないかなぁ，とか思いますわね．実際にそれでできますわ．一般的な形でできることを一度見ようと思いますが，少し難しいので，余裕がなければ次のページの具体例まで飛ばしていただいて構いませんわ．まず平方完成をして $1/(1+(f(x))^2)$ の形に持っていきましょう．

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} = \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\left(\left(\sqrt{\frac{a}{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2+1\right)$$

煩雑なので $\alpha = c-\dfrac{b^2}{4a}, \beta = \sqrt{\dfrac{a}{c-\frac{b^2}{4a}}}$ とおきまして，

$$\beta\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \tan\theta$$

と置換することを考えます．

$$x = \frac{\tan\theta}{\beta}-\frac{b}{2a}$$

より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\beta\cos^2\theta}$$

となりますわ．結果的に

$$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int\frac{1}{\alpha(\tan^2\theta+1)}\frac{1}{\beta\cos^2\theta}d\theta = \int\frac{1}{\alpha\beta}d\theta$$

となり，積分できますわ．

　具体例を一つみておきましょう．次の積分を考えてみましょう．

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}-4}{4}}\frac{1}{2x^2+4x+3}dx$$

まず，そもそも分数関数の積分方針の手順 1,2 が既に終わっていることを確認しましょう．手順 1 は済んでますし，手順 2 は分母が実数範囲で因数分解できないので部分分数分解できないので済んでますわ．では手順 3 で (c) のタイプなので tan 置換をしてみましょう．まず平方完成して

$$2x^2+4x+3 = 2(x+1)^2+1 = (\sqrt{2}(x+1))^2+1$$

ですので，$\sqrt{2}(x+1) = \tan\theta$ とおくと $x = \frac{\tan\theta}{\sqrt{2}}-1$ から，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos^2\theta},\quad x: -1 \to \frac{\sqrt{2}-4}{4}\text{のとき}\theta: 0 \to \frac{\pi}{3}$$

であるので

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}-4}{4}}\frac{1}{2x^2+4x+3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{\sqrt{2}\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}d\theta = \frac{\pi}{3}$$

となり解けましたわ.

練習問題 3

次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+4}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2-1}{x^2-x-2}dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x-1}{x^3-x^2+x-1}dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+8}{x^3+3x^2+3x+1}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{4x^2+4x+2}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{dx}{4x^2+4x+2}$　(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{4x^3+4x^2+6x+3}{4x^2+4x+2}dx$

4　無理関数の積分方針

さて，無理関数の積分方針見ていきますわよ.

4.1　基本的な例

基本的な方針は次の二つである.

無理関数の積分の基本的な方針

次の方法が基本的である.

- 分母の有理化をする.
- $\sqrt{f(x)}$ があるとき $t=f(x)$ と置換する.（$f(x)$ が一次式の時は $t=\sqrt{f(x)}$ と置換）

一緒に例題をやってみますわよ.

$$(1)\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx \qquad (2)\int_{-1}^1 x\sqrt{x+1}dx$$

まず (1) をやってみましょう．分母に $\sqrt{x+1}+1$ があるので，有理化いたしますわね.

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x}=\sqrt{x+1}-1.$$

これでもうポイント 1 を使えば解けますね.

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx=\int_1^3(\sqrt{x+1}-1)dx=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^3=\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

次に (2) を解いてみますわよ．$\sqrt{x+1}$ が入っているので $t=\sqrt{x+1}$ と置換してみましょう．

$$x=t^2-1, \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2t}$$

であるので

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}dx=\int_0^{\sqrt{2}}(t^2-1)t\cdot 2tdt=\int_0^{\sqrt{2}}(2t^4-2t^2)dt=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{15}.$$

となりますわ．

4.2　特殊な置換法

無理関数には特殊な置換法をしなければ解けないものがありますわ．これらは解法を覚えておかないとおそらく解けませんので，頑張って覚えてくださいませ．いくつかの方法があるものもありますので，そういうものはどれか一つを選んで覚えていただけたらよろしいですわ．

特殊な置換法

1. $\sqrt{a^2-x^2}\cdots x=a\sin\theta$ と置換する．
2. $1/\sqrt{1+x^2}\cdots$ 次の二つの方法がある．
   - $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換する．
   - $\int dx/\sqrt{1+x^2}=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$ を暗記する．
3. $\sqrt{x^2+1}\cdots$ 次の二つの方法がある．
   - 部分積分を用いる．
   - $x=\sinh\theta$ と置換する．

順番に一緒にやってみましょう．

$$(1)\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad (2)\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \qquad (3)\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx$$

まず (1) からいきますわよ．一つ目のタイプなので，$x=\sin\theta$ と置換すると

$$dx/d\theta=\cos\theta, \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \pi/2 \end{array}$$

より

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|\cos\theta|}\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

と解けますわ．

(2) にいきますわよ．二つ目のタイプなので $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換してみましょう．

$$\frac{dt}{dx}=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{t}{\sqrt{x^2+1}}$$

より，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

となります．方法の二つ目で書いてあるのはこの結果を暗記してしまおうというものですわ．計算が面倒くさかったら覚えてしまうのも手ですわね．

(3) にいきますわよ．三つ目のタイプなので部分積分を用いた方法で解いてみましょう．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx &= \int_0^1 1\cdot\sqrt{x^2+1}dx \\
&= \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx \\
&= \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1} = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

ここで (2) を使えば

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1} = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$$

と分かりますわ．

二つ目の $x=\sinh\theta$ と置換する方法もやってみますわね．この方法は多少難しいので，余力のない人は飛ばしてくださって構いませんわ．まず双曲線関数と呼ばれる関数 sinh（ハイパボリックサイン），cosh（ハイパボリックコサイン）を紹介しますわね．この関数は次のように定義されます．

$$\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

なぜ三角関数と似たような名前，表記が用いられるのかといると，次のような三角関数と似た性質を持つからですわ．

$$\begin{aligned}
(\sinh\theta)' = \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)' &= \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \cosh\theta, \\
(\cosh\theta)' = \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)' &= \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \sinh\theta, \\
\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 &= \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4} - \frac{e^{2\theta}-2+e^{-2\theta}}{4} = 1.
\end{aligned}$$

確かに三角関数と似ていますわね．置換する際に必要となりますので $\sinh\theta$ の逆関数も見ておきますわよ．

$$
\begin{aligned}
\sinh\theta = x &\iff \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} = x \\
&\iff (e^{\theta})^2 - 2xe^{\theta} - 1 = 0 \quad \text{（両辺に } e^{\theta} \text{を掛けた）} \\
&\iff e^{\theta} = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{（} e^{\theta} \text{の二次方程式と思い解いた，} e^{\theta} > 0 \text{ より } \pm \text{ は } + \text{ を採用する）} \\
&\iff \theta = \log(x + \sqrt{x^2+1}).
\end{aligned}
$$

さて，これらの性質を使いながら，双曲線関数で置換積分をして，(3) の積分 $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ を解いてみましょう．$x = \sinh\theta$ と置換しますわ．まず

$$
\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\sinh\theta = \cosh\theta
$$

から

$$
dx = \cosh\theta d\theta
$$

となりますわ．次に積分区間は先程の逆関数を使えば

$$
\begin{aligned}
x = 0 &\iff \sinh\theta = 0 \iff \theta = \log(0 + \sqrt{0^2+1}) = 0 \\
x = 1 &\iff \sinh\theta = 1 \iff \theta = \log(1 + \sqrt{1^2+1}) = \log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

となるので

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\log(1+\sqrt{2})$

となりますわ．よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx &= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \sqrt{\sinh^2\theta + 1}\cosh\theta d\theta \\
&= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \sqrt{\cosh^2\theta}\cosh\theta d\theta \qquad \text{（} \cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1 \text{ を使った）} \\
&= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \cosh^2\theta d\theta \qquad \text{（} \cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} > 0 \text{ を使った）} \\
&= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4} d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2\theta}}{2} + 2\theta - \frac{e^{-2\theta}}{2}\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} + 2\log(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2(1+\sqrt{2})^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2} + 2\log(1+\sqrt{2}) - \frac{(-1+\sqrt{2})^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

となりますわ．ちょっと大変ですわね．

以上の無理関数の積分方針をまとめておきますわ．

ポイント 5. 無理関数の積分方針

次の方法が基本的である．

- 分母の有理化をする．
- $\sqrt{f(x)}$ があるとき $t = f(x)$ と置換する．（$f(x)$ が一次式の時は $t = \sqrt{f(x)}$ と置換）

その他に次のような特殊な置換がある．これらは要暗記．

- $\sqrt{a^2 - x^2} \cdots x = a\sin\theta$ と置換する．
- $1/\sqrt{1+x^2} \cdots$ 次の二つの方法がある．
  - $t = x + \sqrt{x^2+1}$ と置換する．
  - $\int 1/\sqrt{1+x^2}dx = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ を暗記する．
- $\sqrt{x^2+1} \cdots$ 次の二つの方法がある．
  - 部分積分を用いる．
  - $x = \sinh\theta$ と置換する．

練習問題 4

次の積分を求めよ．

(1)	$\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$	(2)	$\displaystyle\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}dx$	(3)	$\displaystyle\int \sin\sqrt{2x-1}dx$
(4)	$\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$	(5)	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$	(6)	$\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}dx$

※ ヒント：(4)，(5) は式変形をして $\sqrt{(x\text{ の式})^2+1}$ の形を作り出せ．

5　微分接触法

この節では微分接触法を紹介しますわ．必ずしも必要な手法ではないから余裕がない方は飛ばしていただいて結構ですわ．

ポイント 6. 微分接触法

$F(x) = \int f(x)dx$ とすると，f, g がいい条件を満たすとき

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

となる．(いい条件とは f が積分可能，g が微分可能であること)

これは $g'(x)$ は無視して $g(x)$ を一つの文字だと思って $f(g(x))$ を積分して $F(g(x))$ とすれば良いということですわ．これが正しいことは，合成関数の微分法から，右辺を微分すれば左辺の被積分関数になることで確かめられますわ．

$$(F(g(x))+C)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

微分接触法と呼ばれるのは $g(x)$ の微分がひっついているからですわね．この見方ができるようになると積分の手間が減ることがありますの．いくつか例をやってみましょう．

$$(1)\int \frac{2x}{x^2+1}dx \quad (2)\int x^2\sin 2x^3 dx \quad (3)\int a^x dx\ (a\text{ は正定数})$$

まず (1) からいきますわね．分母を微分すると $2x$ でこれは分子になってますので，先の紹介での $f(x), g(x)$ を $f(x)=1/x, g(x)=x^2+1$ と見れば微分接触法が使えますわ．

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'dx\\ &= \log(x^2+1)+C.\quad \text{（}x^2+1\text{ を一つの文字だと思って積分した）}\end{aligned}$$

これはポイント 4（分数関数の積分方針）では 3 の (b) のタイプに分類されるものですね．実は 3 の (b) は微分接触法を使っていたんですわね．

次に (2) をやってみますわよ．sin の中身 $2x^3$ を微分してみると $6x^2$ になりますわ．これは x^2 の定数倍ですので，次のように変形すれば微分接触法で計算できますわ．

$$\begin{aligned}\int x^2\sin 2x^3dx &= \frac{1}{6}\int 6x^2\sin 2x^3 dx\\ &= \frac{1}{6}\int \sin 2x^3\cdot(2x^3)'dx\\ &= -\frac{1}{6}\cos 2x^3.\quad \text{（}2x^3\text{を一つも文字だと思って積分した）}\end{aligned}$$

最後に (3) をやりますわよ．これは次のように変形すると見えてきますわ．

$$\int a^x dx = \int \left(e^{\log a}\right)^x dx = \int e^{\log a\cdot x}dx.$$

$\log a\cdot x$ を微分すると $\log a$ であるので

$$\begin{aligned}\int e^{\log a\cdot x}dx &= \frac{1}{\log a}\int \log a\cdot e^{\log a\cdot x}dx \quad \text{（}\log a\text{ を作り出した）}\\ &= \frac{1}{\log a}e^{\log a\cdot x}+C \quad \text{（}\log a\cdot x\text{ を一つの文字だと思って積分した）}\\ &= \frac{a^x}{\log a}+C\end{aligned}$$

となり，結局

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}+C$$

となりますわ．これはポイント 1 の (8) の公式ですが，これで (7) から導けることが分かりましたわね．

練習問題 5

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx$

(4) $\displaystyle\int \tan x dx$　(5) $\displaystyle\int \left(\tan^3 x+\tan x\right)dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

6　練習問題の解答

練習問題 1

(1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log|x| + C.$

(3) $\displaystyle\int (2\sin 2x - 3\cos 3x)dx = -\cos 2x - \sin 3x + C.$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x + \frac{1}{\tan x} + C.$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + C.$

(6) $\displaystyle\int 3^{2x}dx = \frac{3^{2x}}{2\log 3} + C.$

練習問題 2

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$

(2) $t=\cos x$ と置換すると $dt = -\sin x dx$ より

$$\int \sin^3 x dx = \int (1-\sin^2)\sin x dx = \int (1-t^2)(-1)dt = -t+\frac{1}{3}t^3+C = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

(3)

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1-\cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

(4) $\displaystyle \int \sin 4x \cos 2x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin 6x + \sin 2x\right) dx = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

(5) $\displaystyle \int \cos x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos(-2x)\right) dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$

(6)

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \int_0^\pi \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| dx$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} dx = \left[2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = 2\sqrt{2}.$$

(7)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1+\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 2\sqrt{2}.$$

(8) $\sin x$ の奇数乗なので $t = \cos x$ と置換すると $dt = -\sin x dx$ より

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x dx = \int \frac{1}{1-t^2}(-1) dt$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

別解）$t=\tan(x/2)$ と置換すると

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(9) $t=\tan(x/2)$ と置換すると

$$\int \frac{\sin x+1}{\cos x+1}dx = \int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}+1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)dt$$

$$= \log|1+t^2| + t + C = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}^2\right| + \tan\frac{x}{2} + C.$$

練習問題 3

(1) $$\int \frac{1}{x^2-4x+2}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}dx = \frac{1}{3}(x-2)^3 + C.$$

(2) $$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx = \int \frac{1}{3}\frac{(x^3+3x+1)'}{x^3+3x+1}dx = \log|x^3+3x+1| + C.$$

(3)

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}dx = \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2+1}dx$$

であることに注目して $x/2=\tan\theta$ と置換すると $dx=(2/\cos^2\theta)d\theta$ であり積分区間は

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 2\sqrt{3} \\ \hline \theta & 0 & \to & \pi/3 \end{array}$$

となるので

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

(4) $$\int \frac{x^3-x^2-1}{x^2-x-2}dx = \int \left(x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \log|(x+1)(x-2)| + C.$$

(5)

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \left(2 + \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$= 2x + \log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x^2+1| + C.$$

(6)

$$\int \frac{x^2+5x+8}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3}\right) dx$$

$$= \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C.$$

(7) $\displaystyle \int \frac{4x+2}{4x^2+4x+2}dx = \int \frac{1}{2}\frac{(4x^2+4x+2)'}{4x^2+4x+2}dx = \frac{1}{2}\log|4x^2+4x+2| + C.$

(8)

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+2dx} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{(2x+1)^2+1}dx$$

に注目して $2x+1=\tan\theta$ と置換すると $2dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり積分区間は下表のようになる.

x	0	$\to$	$(\sqrt{3}-1)/2$
θ	$\pi/4$	$\to$	$\pi/3$

よって

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+2}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{(2x+1)^2+1}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24}.$$

(9)

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{4x^3+4x^2+6x+3}{4x^2+4x+2}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\frac{8x+4}{4x^2+4x+2} + \frac{1}{4x^2+4x+2}\right) dx.$$

まず

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\frac{8x+4}{4x^2+4x+2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log|4x^2+4x+2|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\log 2$$

である．次に $2x+1=\tan\theta$ と置換すると $2dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり積分区間は下表のようになる.

x	0	$\to$	$(\sqrt{3}-1)/2$
θ	$\pi/4$	$\to$	$\pi/3$

よって

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+2}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \frac{1}{(2x+1)^2+1}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\,\frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}d\theta = \left[\frac{\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24}.$$

以上より求める積分値は $\underline{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2}\log 2 + \dfrac{\pi}{24}}$.

練習問題 4

(1) $t = x^2+1$ と置換すると $dt = 2xdx$ より

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{1}{2}(t-1)\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})dt$$
$$= \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(2)

$$\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

第一項について，$t = 1-x^2$ と置換すると $dt = -2xdx$ であり積分区間は

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	0

となるので

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \left[-\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 = \frac{1}{3}.$$

第二項について，$x = \sin\theta$ と置換すると，$dx = \cos\theta d\theta$ であり積分区間は

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\pi/2$

となるので

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

よって

$$\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

(3) $t=\sqrt{2x-1}$ と置換すると $dt=(1/\sqrt{2x+1})dx$ より

$$\begin{aligned}\int \sin\sqrt{2x-1}dx &= \int t\sin t dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t + C\\ &= -\sqrt{2x-1}\cos\sqrt{2x-1} + \sin\sqrt{2x-1} + C.\end{aligned}$$

(4) $t=\sqrt{x}$ と置換すると $dt=(1/2\sqrt{x})dx$ より

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2\,e^{\sqrt{x}} + C.$$

(5)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}dx$$

に注目し $t=x/2$ と置換すると $dt=(1/2)dx$ より

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt.$$

$u=t+\sqrt{t^2+1}$ と置換すると

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{u}{\sqrt{t^2+1}}$$

より，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dx &= \int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log(t+\sqrt{t^2+1}) + C\\ &= \log\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right) + C = \log\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\right) + C\\ &= \log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) - \log 2 + C = \log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) + C'.\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+4}dx &= \int 1\cdot\sqrt{x^2+4}dx = x\sqrt{x^2+4} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx\\ &= x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}dx + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}dx.\end{aligned}$$

よって (5) の答えを用いると

$$\int \sqrt{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+4} + 4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right) + C.$$

練習問題 5

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx = \int \frac{1}{3}\frac{(x^3+3x+1)'}{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\log|x^3+3x+1| + C.$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx = \log|e^x+1| + C.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{(\log x)'}{\log x}dx = \log|\log|x|| + C.$

(4) $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\log|\cos x| + C.$

(5)

$$\begin{aligned}\int \left(\tan^3 x + \tan x\right) dx &= \int \tan x \left(\tan^2 x + 1\right) dx = \int \tan x \frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \int \tan x (\tan x)' dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + C.\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx = \log|e^x+e^{-x}| + C.$

7 ポイントまとめ

ポイント 1. 基本的な積分公式

(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(4) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}x dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

(7) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

(8) $\displaystyle\int a^x = \frac{a^x}{\log a} + C$

ポイント 2. 積分の性質

$f(x), g(x)$ を積分可能な関数，a, b を定数，$\int f(x)dx = F(x)$ とする．次が成り立つ．

$$(1)\quad \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$(2)\quad \int af(x)dx = a\int f(x)dx$$
$$(3)\quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$$

ポイント 3. 三角関数の入った関数の積分方針

1. $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$
   n が偶数 $\cdots$ 半角公式を使い次数下げと積分.
   n が奇数 $\cdots \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使って $(\sin x$ の式$)\cos x$ か $(\cos x$ の式$)\sin x$ の形にし，$\cos^n x$ なら $t = \sin x, \sin^n x$ なら $t = \cos x$ と置換する.
2. $\int \sin nx \cos mx dx \cdots$ 積和公式で三角関数の和の形にする.
3. $\sqrt{1+\cos x}, \sqrt{1-\cos x} \cdots$ 半角公式を使う.
4. 本当に解けない時（必須ではない）$\cdots t = \tan(x/2)$ と置換する．$\sin x, \cos x, dx$ は
   - $x = 2 \cdot \dfrac{x}{2}$ とみて倍角公式を使う
   - $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を使う
   - $t = \tan\dfrac{x}{2}$ を微分して dx を求める

   の方針で t で表す.

ポイント 4. 分数関数の積分方針

1. 割り算をして（分子の次数）<（分母の次数）となるようにする.
2. 部分分数分解する.
3. 次のいずれかの形に帰着する.
   (a) $\dfrac{1}{(ax+b)^n} \cdots$ 積分公式を使うと $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx = \frac{1}{(-n+1)(ax+b)^{n-1}} + C$
   (b) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdots \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$
   (c) $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} \cdots$ 平方完成して $\tan$ で置換する.

ポイント 5. 無理関数の積分方針

次の方法が基本的である.

- 分母の有理化をする.
- $\sqrt{f(x)}$ があるとき $t=f(x)$ と置換する.（$f(x)$ が一次式の時は $t=\sqrt{f(x)}$ と置換）

その他に次のような特殊な置換がある．これらは要暗記.

- $\sqrt{a^2-x^2}\cdots x=a\sin\theta$ と置換する.
- $1/\sqrt{1+x^2}\cdots$ 次の二つの方法がある.
  - $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換する.
  - $\int 1/\sqrt{1+x^2}dx=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$ を暗記する.
- $\sqrt{x^2+1}\cdots$ 次の二つの方法がある.
  - 部分積分を用いる.
  - $x=\sinh\theta$ と置換する.

ポイント 6. 微分接触法

$F(x)=\int f(x)dx$ とすると，f,g がいい条件を満たすとき

$$\int f(g(x))g'(x)dx=F(g(x))+C$$

となる．(いい条件とは f が積分可能，g が微分可能であること)