漸化式千本ノック *

真中遥道（@GirlwithAHigoi）

2022 年 12 月 8 日

目次

* 千問はない．正確には 82 問である．

1　はじめに

- これは与えられた初項と漸化式から一般項を求める問題の演習のためのプリントである．
- Focus Gold 数学 II+B[1] は難易度の高い漸化式の例題を収録しているが，その演習問題が各種類 1,2 問程度しかない．本記事はそれを補い十分な計算練習量を確保するためのものである．
- 漸化式の分類は Focus Gold 数学 II+B[1] を参考にした．ゆえにレベルはそれの例題ほどである．
- 基本的に問題 (1) のみ解説をつけた．他の問いも解説と同様に解くことができる．
- まず **2 基本**で四つの型を解けるようにし，**2 基本**より後では他の型の漸化式を基本の四つの型へどう帰着させるのかを学ぶ．
- * 付きの問題はおまけである．余裕があれば取り組んでも良い．

2　基本

2.1　等差型

問題（等差型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = a_n + 4$　　(2) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - 5$

(3) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n + 7$　　(4) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} - a_n + 2 = 0$

（答え）

(1) $a_n = 4n - 6$　　(2) $a_n = -5n + 8$

(3) $a_n = 7n - 3$　　(4) $a_n = -2n + 4$

2.2　等比型

問題（等比型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=-3,\quad a_{n+1}=4a_n$　　(2) $a_1=2,\quad a_{n+1}=-5a_n$

(3) $a_1=4,\quad a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$　　(4) $a_1=5,\quad 5a_{n+1}-2a_n=0$

（答え）

(1) $a_n=-3\cdot 4^{n-1}$　　(2) $a_n=2\cdot(-5)^{n-1}$

(3) $a_n=\dfrac{1}{2^{n-3}}$　　(4) $a_n=\dfrac{2^{n-1}}{5^{n-2}}$

2.3　階差型

問題（階差型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+3^n$　　(2) $a_1=\dfrac{1}{2},\quad a_{n+1}=a_n-3n-1$

(3) $a_1=0,\quad a_{n+1}=a_n+3n^2-n$　　(4) $a_1=0,\quad a_{n+1}=a_n-n^3$

(5) $a_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$　　(6)* $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\left|\dfrac{2n-3}{2}\right|$

（答え）※階差型ゆえ，$n=1$ での成立を確認すること．

(1) $a_n=\dfrac{3^n+1}{2}$　　(2) $a_n=\dfrac{-3n^2+n+3}{2}$

(3) $a_n=(n-1)^2n$　　(4) $a_n=-\dfrac{(n-1)^2n^2}{4}$

(5) $a_n=3-\dfrac{1}{n}$　　(6) $a_1=1,\ a_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n+\dfrac{7}{2}\ (n\geqq 2)$

2.4　$a_{n+1} = pa_n + q$ 型

問題（$a_{n+1} = pa_n + q$ 型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4$

(2) $a_1 = -1/2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 5$

(3) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2$

(4) $a_1 = 5/4, \quad a_{n+1} = 5a_n + 3$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n + 4$

(6) $a_1 = 4/5, \quad a_{n+1} = 6a_n + 6$

(7) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 7$

(8) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 6a_n + 5$

(9) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4$

(10) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3$

（答え）

(1) $a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 4$

(2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - \dfrac{5}{2}$

(3) $a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 2$

(4) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1} - \dfrac{3}{4}$

(5) $a_n = (-1)^n + 2$

(6) $a_n = \dfrac{2 \cdot 6^n}{5} - \dfrac{6}{5}$

(7) $a_n = \dfrac{4^n}{3} - \dfrac{7}{3}$

(8) $a_n = 4 \cdot 6^{n-1} - 1$

(9) $a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2$

(10) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3$

（解説）(1) のみ解説する．（特性方程式は $x = 2x + 4$ となりその解は $x = -4$.[*1]これをもとに変形する）漸化式を変形すると $a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$ となる．数列 $\{a_n + 4\}$ は初項が $a_1 + 4 = 7$, 公比が 2 の等比数列ゆえ，$a_n - 4 = 7 \cdot 2^{n-1}$．よって$\underline{a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 4}$.

[*1] この計算は計算用紙で行い，わざわざ解答に書かなくて良い．

3　応用

3.1　$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型

問題（$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = -9, \quad a_{n+1} = 3a_n + 20n - 4$　(2) $a_1 = -3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 4n + 2$

(3) $a_1 = 1/4, \quad a_{n+1} = 5a_n + 12n - 8$　(4) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1$

(5) $a_1 = -1/5, \quad a_{n+1} = 6a_n + 30n - 25$　(6) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -a_n + 4n + 3$

(7) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 6a_n + 5n + 3$　(8) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 7n - 3$

(9) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3n - 2$　(10) $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = 3a_n + 4n + 5$

（答え）

(1) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 10n - 3$　(2) $a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 4n - 6$

(3) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1} - 3n + \dfrac{5}{4}$　(4) $a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 2n - 3$

(5) $a_n = 2 \cdot 6^{n-1} - 6n + \dfrac{19}{5}$　(6) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2} + 2n + \dfrac{1}{2}$

(7) $a_n = \dfrac{4 \cdot 6^{n-1}}{5} - n - \dfrac{4}{5}$　(8) $a_n = \dfrac{10 \cdot 4^{n-1}}{9} - \dfrac{7}{3}n + \dfrac{2}{9}$

(9) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3n - 1$　(10) $a_n = \dfrac{7 \cdot 3^{n-1}}{2} - 2n - \dfrac{7}{2}$

（解説）(1) のみ解説する．与式より

$$a_{n+1} = 3a_n + 20n - 4, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} + 20(n+1) - 4.$$

後者から前者を引いて

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 20$$

を得る．$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$b_1 = a_2 - a_1 = -2, \quad b_{n+1} = 3b_n + 20$$

である．[*2]後者より $b_{n+1}+10=3(b_n+10)$ であるので，数列 $\{b_n+10\}$ は初項が $-2+10=8$, 公比 3 の等比数列．よって $b_n+10=8\cdot 3^{n-1}$ ゆえ $b_n=8\cdot 3^{n-1}-10$ である．したがって $a_{n+1}=a_n+b_n=a_n+8\cdot 3^{n-1}-10$ であるので，$n\geqq 2$ に対して

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(8\cdot 3^{k-1}-10\right)=-9+8\cdot\frac{(3^{n-1}-1)}{3-1}-10(n-1)=4\cdot 3^{n-1}-10n-3.$$

これは $n=1$ でも正しい．よって $\underline{a_n=4\cdot 3^{n-1}-10n-3}$.

3.2　$a_{n+1}=pa_n+r^n$ 型

問題（$a_{n+1}=pa_n+r^n$ 型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=4,\quad a_{n+1}=2a_n+4^n$　　(2) $a_1=2,\quad a_{n+1}=3a_n+(-2)^n$

(3) $a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n+2^n$　　(4) $a_1=5,\quad a_{n+1}=6a_n+4^n$

(5) $a_1=2,\quad a_{n+1}=2a_n+5^n$　　(6) $a_1=3,\quad a_{n+1}=-3a_n+2^n$

(7) $a_1=-2,\quad a_{n+1}=4a_n+2^n$　　(8) $a_1=3,\quad a_{n+1}=5a_n+3^n$

(9) $a_1=3,\quad a_{n+1}=-2a_n+3^n$　　(10) $a_1=1,\quad a_{n+1}=-a_n+1/2^n$

（答え）

(1) $a_n=2^n+2^{2n-1}$　　(2) $a_n=\dfrac{8\cdot 3^{n-1}}{5}-\dfrac{(-2)^n}{5}$

(3) $a_n=5\cdot 3^{n-1}-2^n$　　(4) $a_n=7\cdot 6^{n-1}-2^{2n-1}$

(5) $a_n=\dfrac{2^{n-1}}{3}+\dfrac{5^n}{3}$　　(6) $a_n=\dfrac{13\cdot(-3)^n}{5}+\dfrac{2^n}{5}$

(7) $a_n=-4^{n-1}-2^{n-1}$　　(8) $a_n=\dfrac{9\cdot 5^{n-1}}{2}-\dfrac{3^n}{2}$

(9) $a_n=\dfrac{3\cdot 2^{n+1}}{5}+\dfrac{3^n}{5}$　　(10) $a_n=\dfrac{2\cdot(-1)^{n-1}}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$

[*2] これは数列 $\{b_n\}$ が $a_{n+1}=pa_n+q$ 型になっているということ．ここから $a_{n+1}=pa_n+q$ 型の解法を用いる．

（解説）(1) のみ解説する．漸化式の両辺を 4^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{2}{4}\cdot\frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{4}$$

を得る．$b_n = a_n/4^n$ とおくと，

$$b_1 = \frac{a_1}{4} = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}$$

となる．[*3]後者より

$$b_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{2}\right)$$

であるので，数列 $\{b_n - 1/2\}$ は初項が $b_1 - 1/2 = 1/2$，公比が $1/2$ の等比数列．よって

$$b_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}.$$

したがって

$$a_n = 4^n b_n = 2^n + \frac{4^n}{2} = \underline{2^n + 2^{2n-1}}.$$

3.3　${a_{n+1}}^q = p{a_n}^r$ 型

問題（${a_{n+1}}^q = p{a_n}^r$ 型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4{a_n}^2$

(2) $a_1 = 9, \quad a_{n+1} = 3{a_n}^3$

(3) $a_1 = 9, \quad a_{n+1} = 3{a_n}^4$

(4) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$

(5) $a_1 = \sqrt{3}, \quad {a_{n+1}}^5 = 3{a_n}^2$

(6) $a_1 = 36, \quad {a_{n+1}}^3 = 6{a_n}^4$

(7) $a_1 = \sqrt{2}, \quad {a_{n+1}}^3 = 2{a_n}^2$

(8) $a_1 = 4, \quad {a_{n+1}}^2 = 2{a_n}^3$

(9) $a_1 = 16, \quad \sqrt[3]{a_{n+1}} = 4\sqrt{a_n}$

(10) $a_1 = 9, \quad \dfrac{1}{a_{n+1}} = 3{a_n}^2$

[*3] これは数列 $\{b_n\}$ が $a_{n+1} = pa_n + q$ 型になっているということ．ここから $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の解法を用いる．

（答え）

(1) $a_n = 4^{3\cdot 2^{n-2}-1}$　　(2) $a_n = \sqrt{3}^{5\cdot 3^{n-1}-1}$

(3) $a_n = \sqrt[3]{3}^{7\cdot 4^{n-1}-1}$　　(4) $a_n = 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}+2}$

(5) $a_n = \sqrt[3]{3}^{\frac{2^{n-2}}{5^{n-1}}+1}$　　(6) $a_n = 6^{\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}-1}$

(7) $a_n = 2^{-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}+1}$　　(8) $a_n = 2^{\frac{3^n}{2^{n-1}}-1}$

(9) $a_n = 4^{\frac{3^{n-1}}{2^{n-4}}-6}$　　(10) $a_n = \sqrt[3]{3}^{7\cdot(-2)^{n-1}-1}$

（解説）(1) のみ解説する．$a_1 > 0$．また $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} = 4{a_n}^2 > 0$．よって $\{a_n\}$ の各項は正．従って漸化式の両辺 4 を底として対数を取れて

$$\begin{aligned}\log_4 a_{n+1} =& \log_4(4{a_n}^2),\\ \log_4 a_{n+1} =& \log_4 4 + \log_4 {a_n}^2,\\ \log_4 a_{n+1} =& 1 + 2\log_4 a_n\end{aligned}$$

を得る．$b_n = \log_4 a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = \log_4 a_1 = 1/2, \quad b_{n+1} = 2b_n + 1$$

を満たす.[*4]

$$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$$

であるので，数列 $\{b_n + 1\}$ は初項が $b_1 + 1 = 3/2$，公比が 2 の等比数列ゆえ，$b_n + 1 = 3\cdot 2^{n-2}$．よって $b_n = 3\cdot 2^{n-2} - 1$．これより $\underline{a_n = 4^{b_n} = 4^{3\cdot 2^{n-2}-1}}$.

3.4　$f(n)a_{n+1} = f(n+1)a_n + q$ 型,$a_{n+1} = f(n)a_n$ 型

問題（$f(n)a_{n+1} = f(n+1)a_n + q$ 型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1, \quad na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$　　(2) $a_1 = 2, \quad na_{n+1} = (n+1)a_n + 3$

（答え）

(1) $a_n = 2n - 1$　　(2) $a_n = 5n - 3$

[*4] これは数列 b_n が $a_{n+1} = pa_n + q$ 型になっているということ．ここから $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の解法を用いる．

（解説）(1) のみ解説する．両辺 $n(n+1)$ で割ると

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{n+1} &= \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)},\\ \frac{a_{n+1}}{n+1} &= \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

となる．[*5] よって

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

したがって $\underline{a_n = 2n-1}$.

問題（$a_{n+1} = f(n)a_n$ 型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = 1/6,\quad (n+3)a_{n+1} = (n+1)a_n$　　(2) $a_1 = 1,\quad na_{n+1} = (n+1)a_n$

(3) $a_1 = 6,\quad (n+1)a_{n+1} = (n+3)a_n$　　(4) $a_1 = 1,\quad na_{n+1} = (n+1)^2 a_n$

（答え）

(1) $a_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$　　(2) $a_n = n$

(3) $a_n = (n+2)(n+1)$　　(4) $a_n = n \cdot n!$

（解説）(1) のみ解説する．

解法１

$a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+3}a_n$ ゆえ，$n \geqq 4$ のときこれを繰り返し用いて

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n}{n+2}a_{n-1} = \frac{n}{n+2}\frac{n-1}{n+1}a_{n-2} = \cdots = \frac{n}{n+2}\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}a_1\\ &= \frac{3\cdot 2}{(n+2)(n+1)}\frac{1}{6} = \underline{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}.\end{aligned}$$

これは $n = 1, 2, 3$ でも成り立つのでこれが答え．

解法２[*6]

漸化式両辺に $n+2$ を掛けると $(n+3)(n+2)a_{n+1} = (n+2)(n+1)a_n$ ゆえ，これを繰り返し用いて

$$(n+2)(n+1)a_n = (n+1)na_{n-1} = \cdots = 3\cdot 2a_1 = 1.$$

よって $\underline{a_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}}$.

[*5] これは数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ は階差型になっているということ．ここから階差型の解法を用いる．

[*6] 解法２は解法１に比べて使用できる場面が限定的である．

3.5　分数型

問題（分数型）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 3}$　　(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1 - 2a_n}$

(3) $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{4a_n + 3}$　　(4) $a_1 = \dfrac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{2 + a_n}$

（答え）

(1) $a_n = \dfrac{1}{3^n - 1}$　　(2) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{3 - 2^n}$

(3) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{3^n - 2^{n+1}}$　　(4) $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^n + 3^{n-1}}$

（解説） (1) のみ解説する．$a_1 = 1/2 \neq 0$ であり，$a_n \neq 0$ のとき $a_{n+1} = a_n/(2a_n + 3) \neq 0$ である．よって $n = 1, 2, \ldots$ に対して $a_n \neq 0$．与えられた漸化式の両辺逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 3}{a_n} = 2 + 3 \cdot \frac{1}{a_n}.$$

よって $b_n = 1/a_n$ とおくと，

$$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = 3b_n + 2$$

となる．[*7] $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ ゆえ，数列 $\{b_n + 1\}$ は初項が $b_1 + 1 = 3$，公比が 3 の等比数列ゆえ $b_n + 1 = 3^n$．したがって $b_n = 3^n - 1$ ゆえ $\underline{a_n = 1/(3^n - 1)}$．

（注意） $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ 型は載せていない．Focus Gold II+B などで補うこと．

[*7] これは数列 b_n が $a_{n+1} = pa_n + q$ 型になっているということ．ここから $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の解法を用いる．

3.6 三項間漸化式

問題（重解でない場合）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$\begin{aligned}
&(1)\ a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_{n+2}+5a_{n+1}+6a_n=0\\
&(2)\ a_1=-1,\quad a_2=0,\quad a_{n+2}+6a_{n+1}+8a_n=0\\
&(3)\ a_1=3,\quad a_2=4,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n\\
&(4)\ a_1=2,\quad a_2=10,\quad a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}-3a_n=0\\
&(5)\ a_1=4,\quad a_2=1,\quad a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+5a_n\\
&(6)\ a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n
\end{aligned}$$

ヒント：(6) は特性方程式の解 α,β について $\alpha-\beta, 1-\alpha, 1-\beta$ などを先に計算しておき，α,β などおいた記号のままで計算するといくらか楽になる．

（答え）[*8]

(1) $a_n=(-2)^{n+1}+(-3)^n$　　(2) $a_n=(-2)^n+(-4)^{n-1}$

(3) $a_n=2\cdot 3^{n-1}+(-2)^{n-1}$　　(4) $a_n=\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-3}}+(-2)^n$

(5) $a_n=\dfrac{5^{n-1}}{2^{n-2}}+(-2)^n$　　(6) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

（解説）(1) のみ解説する．（特性方程式は $x^2+5x+6=0$ であり，これの解は-2,-3 である[*9]）与えられた漸化式より

$$\begin{aligned}
a_{n+2}+2a_{n+1}&=-3(a_{n+1}+2a_n),\\
a_{n+2}+3a_{n+1}&=-2(a_{n+1}+3a_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ．前者より，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項が $a_2+2a_1=3$，公比が -3 の等比数列である．後者より，数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項が $a_2+3a_1=4$，公比が -2 の等比数列である．したがって

$$\begin{aligned}
a_{n+1}+2a_n&=3\cdot(-3)^{n-1}=-(-3)^n,\\
a_{n+1}+3a_n&=4\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n+1}
\end{aligned}$$

となる．後者から前者を引いて $\underline{a_n=(-2)^{n+1}+(-3)^n}$.

[*8] (6) はフィボナッチ数列と呼ばれる数列である．一般項を見ると多くの項は自然数にはならなさそうだが，漸化式からわかるように全ての項が自然数である．

[*9] この計算は計算用紙で行い，わざわざ解答に書かなくて良い．

問題（重解の場合）

次で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$
\begin{aligned}
&(1)\ a_1 = 2,\quad a_2 = 6,\quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n\\
&(2)\ a_1 = 2,\quad a_2 = 1,\quad a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0\\
&(3)\ a_1 = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{1}{4},\quad 4a_{n+2} + 4a_{n+1} + a_n = 0\\
&(4)\ a_1 = \frac{2}{3},\quad a_2 = -\frac{1}{3},\quad a_{n+2} + \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{9}a_n = 0\\
&(5)\ a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad a_2 = 1,\quad a_{n+2} + \sqrt{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = 0\\
&(6)\ a_1 = \sqrt{3},\quad a_2 = 2,\quad 3a_{n+2} = 2\sqrt{3}a_{n+1} - a_n
\end{aligned}
$$

（答え）

(1) $a_n = 2^{n-1}(n+1)$　　(2) $a_n = (-1)^n(3n-5)$

(3) $a_n = \dfrac{2n-3}{(-2)^n}$　　(4) $a_n = -\dfrac{n+1}{(-3)^n}$

(5) $a_n = \dfrac{3n-4}{\left(-\sqrt{2}\right)^n}$　　(6) $a_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{3}^n}$

（解説）(1) のみ解説する．（特性方程式は $x^2 - 4x + 4 = 0$ であり，これは重解 2 を持つ[*10]）与えられた漸化式より

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

が成り立つ．よって数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項が $a_2 - 2a_1 = 2$，公比が 2 の等比数列ゆえ

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

である．両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$$

となる．$b_n = a_n/2^n$ とおくと，

$$b_1 = \frac{a_1}{2} = 1,\quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$$

より，数列 $\{b_n\}$ は初項が 1，公差が 1/2 の等差数列であるので $b_n = 1 + (n-1)/2 = (n+1)/2$ である．したがって $\underline{a_n = 2^n(n+1)/2 = 2^{n-1}(n+1)}$.

[*10] この計算は計算用紙で行い，わざわざ解答に書かなくて良い．

3.7 連立漸化式

問題（連立漸化式）

次で定義される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$$\begin{aligned}
&(1)\ a_1 =2, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\
&(2)\ a_1 =1, \quad b_1 = 2, \quad a_{n+1} = -3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n - 10b_n \\
&(3)\ a_1 =2, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = 5a_n - 2b_n, \quad b_{n+1} = -4a_n + 7b_n \\
&(4)\ a_1 =3, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = -a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\
&(5)\ a_1 =5, \quad b_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = -a_n - 2b_n \\
&(6)\ a_1 =1, \quad b_1 = 7, \quad a_{n+1} = 4a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 7b_n
\end{aligned}$$

（答え）

$$\begin{aligned}
&(1)\ a_n =4^{n-1} + 1, b_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1 \\
&(2)\ a_n =\frac{1}{9}(-2)^{n+3} - \frac{7}{9}(-11)^{n-1}, b_n = \frac{1}{9}(-2)^{n+1} + \frac{14}{9}(-11)^{n-1} \\
&(3)\ a_n =3^{2n-3} + 5 \cdot 3^{n-2}, b_n = -2 \cdot 3^{2n-3} + 5 \cdot 3^{n-2} \\
&(4)\ a_n =3^{n-1} - (-2)^n, b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - (-2)^{n-1} \\
&(5)\ a_n =12 + 7(-1)^n, b_n = -4 - 7(-1)^n \\
&(6)\ a_n =3 \cdot 8^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}, b_n = 6 \cdot 8^{n-1} + 3^{n-1}
\end{aligned}$$

（解説）[*11](1) のみ解説する．与えられた一つ目の漸化式より，$b_n = a_{n+1} - 2a_n$．添え字を一つ進めれば $b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$．これらを二つ目の漸化式に代入して，

$$\begin{aligned}
a_{n+2} - 2a_{n+1} =& 2a_n + 3(a_{n+1} - 2a_n), \\
a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n =& 0
\end{aligned}$$

となる．[*12]これを変形して以下の二式を得る．[*13]

$$\begin{aligned}
a_{n+2} - 4a_{n+1} &= a_{n+1} - 4a_n, \\
a_{n+2} - a_{n+1} &= 4(a_{n+1} - a_n).
\end{aligned}$$

$a_1 = 2, a_2 = 2a_1 + b_1 = 5$ に注意すれば，前者より

$$a_{n+1} - 4a_n = a_2 - 4a_1 = -3$$

[*11] ここに記した解法の他に，数列 $\{a_n + \beta b_n\}$ が等比数列になるような β を見つけ解いていく解法もある．詳しくは Focus Gold II+B を参照せよ．

[*12] これは数列 $\{a_n\}$ の三項間漸化式になっている．ここから三項間漸化式の解法を用いる．

[*13] 特性方程式が $x^2 - 5x + 4 = 0 \iff x = 1, 4$ であるのでこのように変形できる．

となり，後者より数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項が $a_2-a_1=3$，公比が 4 の等比数列ゆえ

$$a_{n+1}-a_n=3\cdot 4^{n-1}$$

となる．これらの辺々を引いて

$$3a_n=3\cdot 4^{n-1}+3,$$
$$\underline{a_n=4^{n-1}+1}.$$

これと与えられた一つ目の漸化式より

$$b_n=a_{n+1}-2a_n=\underline{2\cdot 4^{n-1}-1}.$$

4 おまけ

- 隣接二項間，三項間の漸化式から一般項を書き出す方法を学習した．では，隣接四項間の漸化式からは一般項を書き下すことはできるだろうか．できるならばどのような方法だろうか.
- より一般に隣接 N 項間の漸化式から一般項を書き下すことはできるだろうか．できるならばどのような方法だろうか.[*14]

参考文献

[1] Focus Gold 数学 II+B 4th Edition, 新興出版社啓林館, 2017, ISBN: 978-4-402-27286-9

[*14] 実は線型代数学という分野を学習すると，隣接 N 項間の漸化式から一般項を書き下す方法について考察することができる．おおまかに言えば，$a_n \mapsto a_{n+1}$ と添え字を 1 進めるという操作が"線型写像"という扱い易いものになっていて，これについて考えていくことになる．二，三項間の漸化式を解く際に行った操作は，「特性方程式を解く」$\leftrightarrow$「固有値を求める」,「等比型になるよう漸化式を変形する」$\leftrightarrow$「ジョルダン標準形に変形する」などと線型代数の言葉で解釈し直すことができる.