有限集合上のフィルターと約積

真中遥道
@GirlwithAHigoi

2023 年 6 月 6 日

約積の具体例を考えていたところ，添字集合が有限集合の場合，約積は結局直積と変わらないことに気づいたのでメモしておく．

まずフィルターの定義を確認する．

定義 1. フィルター

I を空でない集合とする．I 上のフィルター $\mathcal{F}$ とは $\mathcal{F} \subseteq 2^I$ であって以下の条件を満たすものである．

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}, I \in \mathcal{F}$.
2. $X \in \mathcal{F}, X \subseteq Y \implies Y \in \mathcal{F}$.
3. $X, Y \in \mathcal{F} \implies X \cap Y \in \mathcal{F}$.

条件 2 に注目するとフィルターは”大きい部分集合全体”を定めていると思える．

例 2 (単項フィルター)**.** I を空でない集合とする．任意の $i \in I$ に対して，$\{X \subseteq I \mid i \in X\}$ は I 上のフィルターである．このように表せるフィルターを単項フィルターという．

例 3. I を空でない集合とする．任意の空でない I の部分集合に対して，$\{X \subseteq I \mid S \subseteq X\}$ は I 上のフィルターである．このようなフィルターを S が生成するフィルターという．

次の命題は有限集合上のフィルターは例 3 で挙げられたものしかないことを主張する．

命題 4.

I を空でない集合とする．I のフィルター $\mathcal{F}$ について次が成り立つ．

$$\mathcal{F} \text{ が有限集合を元に持つ} \implies S \subseteq I \text{ が一意的に存在して } \mathcal{F} \text{ は } S \text{ が生成するフィルター}$$

特に I が有限集合の場合，I 上のフィルターはある $S \subseteq I$ が生成するフィルターである．

証明. $\mathcal{F}$ が有限集合を含むので $\min\{\#X \mid X \in \mathcal{F}\}$ は存在し有限である．これを与える $\mathcal{F}$ の元を S とおく．$X \in \mathcal{F} \iff S \subseteq X$ を示す．$S \subseteq X \implies X \in \mathcal{F}$ はフィルターの定義より従う．

$X \in \mathcal{F}$ のとき，$S \not\subseteq X$ とすると，S の有限性より $\#S \cap X < \#S$ かつ $S \cap X \in \mathcal{F}$ となり $\#S$ の最小性に矛盾．$|S| = |T|$ なる $T \in \mathcal{F}$ があれば先の議論より $S \subseteq T, T \subseteq S$ となり，$S = T$. □

この命題をもとに添字集合が有限集合の場合，約積は直積であることを示す．まず約積の定義を確認する．

定義 5. 約積

I を空でない集合，$\mathcal{F}$ を I 上のフィルター，$\{A_i\}_{i\in I}$ を空でない集合族とする．

- $\mathcal{F}$ が誘導する $\prod_{i\in I} A_i$ 上の二項関係 $\sim_{\mathcal{F}}$ を

$$a \sim_{\mathcal{F}} b :\Longleftrightarrow \{i \in I \mid a^i = b^i\} \in \mathcal{F}$$

  により定める．ただし a^i は a の i 成分である．$\sim_{\mathcal{F}}$ は同値関係になる．
- $\prod_{i\in I} A_i/ \sim_{\mathcal{F}}$ を $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ と書き，$\mathcal{F}$ を法とする $\{A_i\}_{i\in I}$ の約積という．
- $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{L}$ を言語とする構造の族とする．$\mathcal{F}$ を法とする $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ の約積 $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ を以下で定義する．

$$\left|\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}\right| := \prod_{i\in I} |\mathfrak{A}_i| /\mathcal{F}.$$
$$\mathrm{f}^{\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F}}([a_1],\ldots,[a_n]) := [\left(\mathrm{f}^{\mathfrak{A}_i}({a_1}^i,\ldots,{a_n}^i)\right)_{i\in I}].$$
$$\mathrm{R}^{\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F}}([a_1],\ldots,[a_n]) :\Longleftrightarrow \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash \mathrm{R}^{\mathfrak{A}_i}({a_1}^i,\ldots,{a_n}^i)\} \in \mathcal{F}.$$

  ただし，f, R はそれぞれ $\mathcal{L}$ の関数記号，関係記号である．

以上の定義が well-defined であることは認める．

例 6. $I = \{1, 2\}, \mathcal{F} = \{\{1\}, I\}$ とすると，$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ は $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ に注意すれば $\mathfrak{A}_1$ と同型になる．

次が本稿のメインの主張である．添字集合が有限の場合はいつでも例 6 のようになる．

命題 7. 有限個の約積は直積

I を空でない集合，$\mathcal{F}$ を I 上のフィルター，$\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{L}$ 構造の族とする．$\mathcal{F}$ が有限集合を元に持つなら，ある $S \subseteq I$ が存在して，

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \cong \prod_{i\in S} \mathfrak{A}_i$$

となる．特に I が有限の場合に上は成り立つ．

証明. 命題 4 より I を生成する $S \subseteq I$ が存在する．ϕ を

$$\phi : \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \ni [(a_i)_{i\in I}] \mapsto (a_i)_{i\in S} \in \prod_{i\in S} \mathfrak{A}_i$$

と定める．

$$\begin{aligned}[(a_i)_{i\in I}] = [(b_i)_{i\in I}] &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash a_i = b_i\} \in F \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash a_i = b_i\} \supseteq S \\ &\iff \phi((a_i)_{i\in I}) = \phi((b_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

より ϕ が well-defined であることと，ϕ の単射であることがしたがう．また任意の $(a_i)_{i\in S} \in \prod_{i\in S}\mathfrak{A}_i$ に対して，$a_i \in \mathfrak{A}_i$ $(i \in I \setminus A)$ を適当にとれば，$\phi((a_i)_{i\in I}) = (a_i)_{i\in S}$ となる．よって ϕ は全射である．関数記号 $\mathrm{f} \in \mathcal{L}$ について，$\prod_{i\in S}\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i, \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ での解釈をそれぞれ $f_S, f_i, f_{\mathcal{F}}$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}\phi(f_{\mathcal{F}}([a_1], \ldots, [a_n])) &= \phi([(f_i({a_1}^i, \ldots, {a_n}^i))_{i\in I}]) \\ &= (f_i({a_1}^i, \ldots, {a_n}^i))_{i\in S} \\ &= (f_i(\phi([a_1])^i, \ldots, \phi([a_n])^i)_{i\in S}) \\ &= f_S(\phi([a_1]), \ldots, \phi([a_n]))\end{aligned}$$

となる．関係記号 $\mathrm{R} \in \mathcal{L}$ について，$\prod_{i\in S}\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_i, \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ での解釈をそれぞれ $R_S, R_i, R_{\mathcal{F}}$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{F} \vDash R_{\mathcal{F}}([a_1], \ldots, [a_n]) &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash R_i({a_1}^i, \ldots, {a_n}^i)\} \in \mathcal{F} \\ &\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \vDash R_i({a_1}^i, \ldots, {a_n}^i)\} \supseteq S \\ &\iff \prod_{i\in S}\mathfrak{A}_i \vDash R_S(\phi([a_1]), \ldots, \phi([a_n]))\end{aligned}$$

となる．以上より ϕ は同型． $\square$