最小多項式とジョルダン標準形

真中遥道
@GirlwithAHigoi

2024 年 7 月 5 日

行列の最小多項式とジョルダン標準形の関係について解説する．本稿では K を体とし．正方行列 A, B に対して

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

と書き，固有値 λ の l 次ジョルダン細胞を $J(l, \lambda)$ とおく．まず定義を与える．

定義 1.

(1) $f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \in K[x], A \in \mathrm{M}_n(K)$ に対して $f(A) = \sum_{i=0}^{N} a_i A^i$ と定める．ただし $A^0 = I_N$ とする．

(2) $A \in \mathrm{M}_n(K)$ とする．$f(A) = O$ なる $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ の中で最も次数の低くモニックなものを A の最小多項式という．

命題 2.

(1) 任意の $A \in \mathrm{M}_n(K)$ に対してその最小多項式が一意的に存在する．

(2) $A \in \mathrm{M}_n(K)$ を根に持つ多項式 $f(x) \in K[x]$ は A の最小多項式 $p(x)$ で割り切れる．

証明. (1) ケーリー・ハミルトンの定理より A を根に持つ 0 でない多項式は存在するので，その中で次数が最も低いモニック多項式 $p(x)$ も存在する．もし $g(x)$ もそのようなものであれば $p(x) = q(x)g(x) + r(x)$ と割り算をし A を代入すると $r(A) = O$ となる．$g(x)$ の次数の最小性から $r(x) = 0$ とわかる．よって $p(x) = q(x)g(x)$ である．次数と最高次係数を比較して $p(x) = g(x)$ となる．

(2) (1) と同様に $f(x)$ を $p(x)$ で割った余りが 0 になることを見ればよい．

□

次の命題が本稿の目的である．

命題 3.

$A \in \mathrm{M}_n(K)$ を任意の行列，A の最小多項式を $f(x)$ とおく．以下は同値である．

(1) $f(x) = \prod_{i=1}^{N}(x-\lambda_i)^{e_i}$．（ただし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ であり，$e_i \geq 1$）

(2) A の固有値は $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ で，A が持つ固有値 λ_i のジョルダン細胞の最大サイズは e_i.

これを示す前にこの命題の典型的な使われ方を見ておこう．

例 4. $A \in \mathrm{M}_3(K)$ の最小多項式が $(x-a)(x-b)^2$ であるとする．このとき A は固有値 a の 1 次のジョルダン細胞と固有値 b の 2 次のジョルダン細胞を持つ．A が 3 次ゆえ A の持つジョルダン細胞はこれらですべてなので，A のジョルダン標準形は $J(1,a) \oplus J(2,b)$ である．

例 5. $A \in \mathrm{M}_5(K)$ の最小多項式が $(x-a)^2(x-b)^2$ であるとする．このとき A は 2 次の固有値 a のジョルダン細胞と 2 次の固有値 b のジョルダン細胞を持つ．A が 5 次ゆえ残り 1 次分のジョルダン細胞を A は持つがこれは $J(1,a)$ か $J(1,b)$．よって A のジョルダン標準形は $J(1,a) \oplus J(2,a) \oplus J(2,b)$ か $J(2,a) \oplus J(1,b) \oplus J(2,b)$ である．

このように最小多項式から A のジョルダン標準形をある程度絞ることができる．テストなどで出てくる行列は高々 5 次程度なのでジョルダン標準形が決定できることも少なくない．また以下のこともわかる．

系 6.

行列について，最小多項式が重根を持たないことと対角化可能であることは同値である．

これは命題 3 をよく見れば直ちにわかるだろう．では命題 3 示していこう．

命題 7.

(1) $f(x) \in K[x]$ と K 上の正方行列 A, B について，$f(A \oplus B) = f(A) \oplus f(B)$.

(2) $f(x) \in K[x], P \in \mathrm{GL}_n(K), A \in \mathrm{M}_n(K)$ に対して $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$.

証明. $f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ とおき，

$$C, C' \in \mathrm{M}_n(K), \quad D, D' \in \mathrm{M}_m(K), \quad P \in \mathrm{GL}_n(K)$$

とする．

(1) 一般に

$$(C \oplus D)^k = C^k \oplus D^k, \quad a(C \oplus D) = (aC) \oplus (aD), \quad C \oplus D + C' \oplus D' = (C + C') \oplus (D + D')$$

であるので，

$$f(A \oplus B) = \sum_{i=0}^{N} a_i (A \oplus B)^i = \sum_{i=0}^{N} (a_i A^i) \oplus (a_i B^i) = \left(\sum_{i=0}^{N} a_i A^i\right) \oplus \left(\sum_{i=0}^{N}) a_i B^i\right) = f(A) \oplus f(B).$$

(2) 一般に

$$(P^{-1}CP)^k = P^{-1}C^kP, \quad P^{-1}CP + P^{-1}C'P = P^{-1}(C+C')P$$

であるので，

$$f(P^{-1}AP) = \sum_{i=0}^{N} a_i(P^{-1}AP)^i = \sum_{i=0}^{N} P^{-1}(a_iA^i)P = P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{N} a_iA^i\right)P = P^{-1}f(A)P.$$

□

命題 8.

(1) 相似な正方行列の最小多項式は等しい．

(2) A, B を K 上の正方行列，それぞれの最小多項式を $f(x), g(x) \in K[x]$ とおく．このとき $A \oplus B$ の最小多項式は $f(x), g(x)$ のモニックな最小公倍元である．

証明. (1) $A \in \mathrm{M}_n(K), P \in \mathrm{GL}_n(K)$ について，A の最小多項式を $f(x) \in K[x]$ とおくと，

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P = P^{-1}OP = O$$

ゆえ，$P^{-1}AP$ の最小多項式 $g(x)$ は $f(x)$ を割り切る．A を $P^{-1}AP$，P を P^{-1}，$f(x)$ を $g(x)$ に置き換え同じ議論をすることで $f(x)$ が $g(x)$ を割り切ることもわかる．$f(x), g(x)$ はいずれもモニックのため $f(x) = g(x)$.

(2) $f(x), g(x)$ の最小公倍元を $p(x)$ とする．$p(A \oplus B) = h(A) \oplus h(B) = O \oplus O = O$ である．$h(x) \in K[x]$ が $h(A \oplus B) = O$ を満たすとき，$h(A) \oplus h(B) = h(A \oplus B) = O$ より $h(A) = O, h(B) = O$ なので，$h(x)$ は $f(x), g(x)$ の倍数である．よって $p(x)$ は $h(x)$ を割り切る．したがって $p(x)$ は $A \oplus B$ の最小多項式である．

□

命題 9.

$J(l, \lambda)$ の最小多項式は $(x-\lambda)^l$ である．

証明.

$$J(l,\lambda) - \lambda I_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$J(l,\lambda)^{l-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ J(l,\lambda)^{l} = O.$$

$(x-\lambda)^l$ が $J(l,\lambda)$ を根に持つため最小多項式は $(x-\lambda)^l$ を割り切り，$(x-\lambda)^{l-1}$ が $J(l,\lambda)$ を根に持たないことから最小多項式は $(x-\lambda)^l$ である． □

命題 3（再掲）

$A \in M_n(K)$ を任意の行列，A の最小多項式を $f(x)$ とおく．以下は同値である．

(1) $f(x) = \prod_{i=1}^{N}(x-\lambda_i)^{e_i}$．（ただし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ であり，$e_i \geq 1$）
(2) A の固有値は $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ で，A が持つ固有値 λ_i のジョルダン細胞の最大サイズは e_i.

証明. (1) $\Longleftarrow$ (2) A のジョルダン標準形を

$$\bigoplus_{i=1}^{N}\bigoplus_{j=1}^{m_i} J(l_{i,j},\lambda_i) = \underbrace{J(l_{1,1},\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J(l_{1,m_1},\lambda_1)}_{\text{固有値}\lambda_1}\oplus\cdots\oplus \underbrace{J(l_{N,1},\lambda_N)\oplus\cdots\oplus J(l_{N,m_N},\lambda_N)}_{\text{固有値}\lambda_N}$$

$$= \begin{pmatrix} J(l_{1,1},\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(l_{1,m_1},\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(l_{N,1},\lambda_N) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(l_{N,m_N},\lambda_N) \end{pmatrix}$$

とおく．ただし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする．命題 8,9 より A の最小多項式は $(x-\lambda_i)^{l_{i,j}}(i = 1,\ldots N, j = 1,\ldots,m_i)$ の最小公倍元 $\prod_{i=1}^{N}(x-\lambda_i)^{e_i}$ である．
(1) $\Longrightarrow$ (2) 上の議論より A が (2) を満たさなければ A の最小多項式は (1) とは異なるものになる． □

問題をいくつかおいておく．

問題 10.

$A \in \mathrm{M}_n(K)$ が $A^2 = A$ を満たすとき，対角化可能であることを示せ．

解答. $A^2 - A = O$ ゆえ A の最小多項式は $x^2 - x$ を割り切るので重根を持たない．よって A は対角化可能.

問題 11.
n を 2 以上の整数，A を n 次複素正方行列とする．A^{n-1} は対角化可能でないが，A^n が対角化可能であるとき，$A^n = O$ となることを示せ．（京大院　理・数学　2019 年度　院試 [1]）

解答. A のジョルダン標準形を J とおく．$k \geq 1$ に対して A^k と J^k は相似ゆえ対角化可能性が一致する．また $A^n = O \iff J^n = O$．よって $A = J$ と仮定してよい．

$$J = \bigoplus_{i=1}^{N} J(n_i, \lambda_i)$$

とおく．

$$\begin{aligned}
& J^n = \bigoplus_{i=1}^{N} J(n_i, \lambda_i)^n \text{が対角化可能である} \\
\iff & J^n = \bigoplus_{i=1}^{N} J(n_i, \lambda_i)^n \text{の最小多項式が重根を持たない} \\
\iff & i = 1, \dots, N \text{ に対して } J(n_i, \lambda_i)^n \text{の最小多項式が重根を持たない} \\
\iff & i = 1, \dots, N \text{ に対して } J(n_i, \lambda_i)^n \text{の最小多項式が } x - {\lambda_i}^n \\
& (\because J(n_i, \lambda_i)^n \text{の固有値は } {\lambda_i}^n \text{のみゆえ最小多項式は } x - {\lambda_i}^n \text{の累乗}) \\
\iff & i = 1, \dots, N \text{ に対して } J(n_i, \lambda_i)^n = {\lambda_i}^n I_{n_i} \\
\iff & i = 1, \dots, N \text{ に対して} \lambda_i = 0 \text{ または } n_i = 1
\end{aligned}$$

である．最後の同値は $n_i \leq n$ より

$$J(n_i, \lambda_i)^n = \begin{pmatrix} {\lambda_i}^n & \cdots & \binom{n}{k}{\lambda_i}^k & \cdots & \binom{n}{n_i - 1}{\lambda_i}^{n - n_i + 1} \\ & {\lambda_i}^n & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & \binom{n}{k}{\lambda_i}^k \\ & \huge{O} & & \ddots & \vdots \\ & & & & {\lambda_i}^n \end{pmatrix}$$

であることよりしたがう．ある $j \in \{1, \dots, N\}$ で $\lambda_j \neq 0$ と仮定する．$n_j = 1$ である．$n_i = 1$ であるか，でなければ $n_i \leq n - 1, \lambda_i = 0$ ゆえ $J(n_i, \lambda_i) = O$ となるので，J^{n-1} は対角行列になり矛盾する．よって $i = 1, \dots, N$ に対して $\lambda_i = 0$ であるので $J^n = O$.

参考文献

[1] ”過去の入試問題”．京都大学大学院理学研究科/理学部数学教室．`https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/past-exams`