アーベル群の指数 n の部分群の個数

真中遥道
@GirlwithAHigoi

最終更新：2023 年 8 月 27 日

本稿の内容

院試勉強をしているときに次のようなタイプの問題に出会った．

問題 1.

アーベル群 G の指数 n の部分群の個数を求めよ．

本稿ではこのタイプの解法を解説する．順番に一般性を上げて解法への理解を深める．なお，$\mathrm{sHom}(G, H)$ で全射準同型 $G \to H$ 全体の集合を表す．

$n = 2$ の場合

まず $n = 2$ のときを考えよう．$K \subseteq G$ が指数 2 の部分群であるとき，G の可換性から K は正規部分群であり G/K が位数 2 の群，つまり $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型になる．逆に部分群 K が $G/K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を満たしているなら，K は指数 2 の部分群になる．

$$K \leq G \text{ かつ } (G : K) = 2 \iff K \trianglelefteq G \text{ かつ } G/K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

よって $G/K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なる部分群の個数を調べれば良い．このような K として思い浮かぶのが全射準同型 $\phi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の核 $\mathrm{Ker}\,\phi$ である．実際，$\phi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が全射準同型なら準同型定理より $G/\mathrm{Ker}\,\phi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

$$\phi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ が全射準同型} \implies \mathrm{Ker}\,\phi \trianglelefteq G \text{ かつ } G/\mathrm{Ker}\,\phi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

では逆に，任意の指数 2 の部分群 K はある全射準同型 $\phi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の核となるだろうか．答えは Yes であり，以下の命題が成立する．

命題 2.

任意のアーベル群 G について以下が成り立つ．

$$\{K \mid K \text{ は } G \text{ の指数 2 の部分群 }\} = \{\mathrm{Ker}\,\phi \mid \phi \in \mathrm{sHom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}$$

証明. $\phi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が全射準同型なら，準同型定理より $G/\operatorname{Ker}\phi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ゆえ，$\operatorname{Ker}\phi$ は G の指数 2 の部分群になる．逆に K が G の指数 2 の部分群であれば同型 $\psi : G/K \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が存在し，これと射影 $\pi : G \to G/K$ との合成 $\psi \circ \pi$ を ϕ とすれば $K = \operatorname{Ker}\phi$ となる． □

次に核と全射準同型の対応について考えよう．$x \in G \setminus \operatorname{Ker}\phi$ なら $\phi(x) = \overline{1}$ ゆえ，$\phi, \psi \in \operatorname{sHom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ について，$\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi = K \implies \phi|_K = \psi|_K$ かつ $\phi|_{G\setminus K} = \psi|_{G\setminus K} \implies \phi = \psi$ である．もちろん $\phi = \psi \implies \operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$ でもある．よって

$$\#\{\operatorname{Ker}\phi \mid \phi \in \operatorname{sHom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\} = \#\operatorname{sHom}(G, H)$$

なので，結局全射準同型 $\phi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の個数を数え上げれば良いと分かる．これを踏まえて次の問題を考えてみよう．

演習 3.

1. $\mathbb{Z}$ の指数 2 の部分群を求めよ．
2. $\mathbb{Z}^2$ の指数 2 の部分群を求めよ．

（解答）

1. 全射準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の個数を数えれば良い．$\mathbb{Z}$ は 1 で自由に生成されるので，全射準同型は $\phi(1) = \overline{1}$ なるもののみ．よって $\mathbb{Z}$ の指数 2 の部分群は 1 つ．
2. 全射準同型 $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の個数を数えれば良い．$\mathbb{Z}^2$ は $(1,0),(0,1)$ で自由に生成されるので，準同型はこれらの像を自由に定めることで決定される．像の選択肢は $\overline{0}, \overline{1}$ の二つがあり，$(1,0),(0,1)$ を共に $\overline{0}$ に写す場合のみ全射とならない．よって全射準同型は 3 つあり，したがって $\mathbb{Z}^2$ の指数 2 の部分群は 3 つ．

$n = p$ の場合

p を素数とし，$n = p$ の場合について考える．部分群 K の指数が p であるとは，$G/K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であることである．$n = 2$ のときの命題 2 と同様に以下が成り立つ．

命題 4.

任意のアーベル群 G について以下が成り立つ．

$$\{K \mid K \text{ は } G \text{ の指数 } p \text{ の部分群 }\} = \{\operatorname{Ker}\phi \mid \phi \in \operatorname{sHom}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\}$$

証明. $\phi : G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が全射準同型なら，準同型定理より $G/\operatorname{Ker}\phi \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ゆえ，$\operatorname{Ker}\phi$ は G の指数 p の部分群になる．逆に K が G の指数 p の部分群であれば同型 $\psi : G/K \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が存在し，これと射影 $\pi : G \to G/K$ との合成 $\psi \circ \pi$ を ϕ とすれば $K = \operatorname{Ker}\phi$ となる． □

ここからが $n \neq 2$ のときに気をつけなければならない箇所である． $n = 2$ のときは $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi \iff \phi = \psi$ だったので全射準同型の核と全射準同型に一対一対応があった．しかし一般に

はこれは成り立たない．実際 ϕ, ψ を

$$\phi : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ni \overline{1} \mapsto \overline{1} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$
$$\psi : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ni \overline{1} \mapsto \overline{2} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

とすると $\phi \neq \psi$ だが $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である．すなわち命題 4 の右辺を直ちには $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への全射準同型に帰着できないのである．ここで救世主のように次の命題がある．

命題 5.

G, H をアーベル群とする．$\operatorname{sHom}(G, H)$ に

$$\phi \sim \psi :\iff \text{ある}\sigma \in \operatorname{Aut}(H)\text{ が存在し}\sigma \circ \phi = \psi.$$

と同値関係を定めると，

$$\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi \iff \phi \sim \psi$$

であり，各同値類の位数は $\#\operatorname{Aut}(H)$.

証明. $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi \iff \phi \sim \psi$ について，$\Longleftarrow$ は明らかである．$\Longrightarrow$ を示す．$K = \operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$ とおくと，準同型定理より同型 $\overline{\phi}, \overline{\psi} : K \to H$ があり，$\overline{\phi} \circ \pi = \phi, \overline{\psi} \circ \pi = \psi$ となる．ただし $\pi : G \to G/K$ は射影．これらを用いて $\sigma = \overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1}$ とおくと，同型の合成ゆえ σ は H の自己同型であり，$\sigma \circ \phi = (\overline{\psi} \circ \overline{\phi}^{-1}) \circ (\overline{\phi} \circ \pi) = \overline{\psi} \circ \pi = \psi$．よって $\phi \sim \psi$．次に同値類の位数について．ϕ の同値類は $\{\sigma \circ \phi \mid \sigma \in \operatorname{Aut}(H)\}$ であり，ϕ の全射性より相異なる $\sigma, \tau \in \operatorname{Aut}(H)$ に対して $\sigma \circ \phi \neq \tau \circ \phi$．よって $\#\{\sigma \circ \phi \mid \sigma \in \operatorname{Aut}(H)\} = \#\operatorname{Aut}(H)$. □

これに基づくと，

$$\begin{aligned}\#\{K \mid K \text{ は } G \text{ の指数 } p \text{ の部分群 }\} &= \#\{\operatorname{Ker}\phi \mid \phi \in \operatorname{sHom}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\}/\sim \\ &= \frac{\#\operatorname{sHom}(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}{\#\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}\end{aligned}$$

となる．これを踏まえて次の問題を考えてみよう．

演習 6.

1. $\mathbb{Z}$ の指数 3 の部分群の個数を求めよ．
2. $\mathbb{Z}^2$ の指数 3 の部分群を求めよ．

（解答）

1. $\mathbb{Z}$ は 1 で自由に生成されるので，全射準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は 2 個ある．また $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $\overline{1} \mapsto \overline{1}, \overline{2}$ なるもの 2 個からなる．よって指数 3 の部分群の個数は $2/2 = 1$ 個ある．
2. $\mathbb{Z}^2$ は $(1,0), (0,1)$ で自由に生成されるので，全射準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $3 \cdot 3 - 1 = 8$ 個ある．また $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $\overline{1} \mapsto \overline{1}, \overline{2}$ なるもの 2 個からなる．よって指数 3 の部分群の個数は $8/2 = 4$ 個ある．

演習 7.

$G = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の指数 3 の部分群の個数を求めよ．

（京大院　理・数学　2014 年度　院試 [1]）

（解答） 自然な全単射

$$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

がある．$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の元は位数を考えると $\overline{1} \mapsto \overline{0}$ のみ．$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $\overline{1} \mapsto \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ の 3 つよりなる．$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $\overline{1} \mapsto \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ の 3 つからなる．準同型 3 つの組に対応する $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の元が全射となるのは，組の全ての準同型が零写像でないときであり，かつこのときに限る．よって $\#\,\mathrm{sHom}(G, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3 \times 3 - 1 = 8$．続いて $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $\overline{1} \mapsto \overline{1}, \overline{2}$ の 2 つからなるので $\#\,\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 2$．位数 3 の群は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と同型であるので，以上から求める個数は $8/2 = 4$ 個.

n が一般の場合

n が一般の場合を考える．K が G の指数 n の部分群のとき，G/K は位数 n のアーベル群になる．これより命題 2,4 と同様に次が成り立つ.

命題 8.

任意のアーベル群 G について以下が成り立つ.

$$\{K \mid K \text{ は } G \text{ の指数 } n \text{ の部分群 }\} = \{\mathrm{Ker}\,\phi \mid \phi \in \mathrm{sHom}(G, H), \#H = n\}$$

証明は全く同様なので省略する．さらに次が成り立つ.

命題 9.

G, H をアーベル群とする．$\bigcup_{\#H=n} \mathrm{sHom}(G, H)$ という集合に

$$(\phi : G \to H) \sim (\psi : G \to H') :\iff H \cong H' \text{かつある同型} \sigma : H \to H' \text{が存在し} \sigma \circ \phi = \psi.$$

と同値関係を定めると,

$$\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Ker}\,\psi \iff \phi \sim \psi$$

であり，$\phi : G \to H$ の同値類の位数は $\#\,\mathrm{Aut}(H)$.

証明は $H \cong H'$ のとき $\mathrm{Aut}(H) \cong \{\phi : H \to H' \mid \phi \text{は同型 }\}$ に気をつけて命題 5 と同様にできる．これに基づくと,

$$\begin{aligned}\#\{K \mid K \text{ は } G \text{ の指数 } p \text{ の部分群 }\} &= \#\left(\{\mathrm{Ker}\,\phi \mid \phi \in \mathrm{sHom}(G, H), \#H = n\}/\sim\right) \\ &= \sum_{H:\text{位数 } n \text{ のアーベル群の同型類}} \frac{\#\,\mathrm{sHom}(G, H)}{\#\,\mathrm{Aut}(H)}\end{aligned}$$

となる．これを踏まえて次の問題を考えてみよう．

演習 10.

1. $\mathbb{Z}$ の指数 4 の部分群の個数を求めよ．
2. $\mathbb{Z}^2$ の指数 4 の部分群の個数を求めよ．

（解答）

1. 位数 4 のアーベル群の同型類は有限生成アーベル群の構造定理より $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ で全て．全射準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は 2 個あり $\#\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2$．全射準同型 $\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ はない．よって，指数 4 の部分群の個数は 2/2=1 個.
2. 準同型 $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は $(1,0),(0,1)$ の像のいずれかが $\overline{1},\overline{3}$ であるとき，かつこのときに限り全射になるので，全射準同型 $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は $4^2-2^2=12$ 個ある．また $\#\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = 2$．次に，準同型 $\mathbb{Z}^2 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ は $(1,0),(0,1)$ の像が相異なりいずれも $(\overline{0},\overline{0})$ でないとき，かつこのときに限り全射になるので，全射準同型 $\mathbb{Z}^2 \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ は $3^2-3=6$ 個ある．また $\#\operatorname{Aut}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2) = \#\mathfrak{S}_3 = 6$．よって，指数 4 の部分群の個数は 12/2+6/6=7 個.

参考文献

[1] “過去の入試問題”．京都大学大学院理学研究科／理学部数学教室．https://www.math.kyoto-u.ac.jp/files/master_exams/2013math_kiso2.pdf