圏論的に見る像、逆像にかかる包含関係

真中遥道
@GirlwithAHigoi

2023 年 5 月 1 日

大した話ではないが，この前気づいたこと（実は以前，西郷甲矢人さんに教えていただいたことであったのだが，そのときには気づかなかった）のメモを残しておく．随伴函手などの圏論の基本的な知識は仮定する．像，逆像にかかる包含関係は，例えば

$$f\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(U_i), \tag{1}$$

$$f\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(U_i), \tag{2}$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i), \tag{3}$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i) \tag{4}$$

のように，等号が成立したりしなかったりして多少ややこしい．圏論的に見るとこれをちょっと整理できる．まず定義をする．

定義 1. 像，逆像

写像 $f: A \to B$，部分集合 $S \subseteq A, T \subseteq B$ に対して，

$$f(S) := \{b \in B \mid \exists a \in A\ (f(a) = b)\}, \quad f^{-1}(T) := \{a \in A \mid f(a) \in T\}$$

と定め，前者を f による S の像，後者を f による T の逆像という．

次が本質的な命題である．

命題 2.

写像 $f: A \to B$，部分集合 $S \subseteq A, T \subseteq B$ について，$S \subseteq f^{-1}(T) \iff f(S) \subseteq T$.

証明 $S \subseteq f^{-1}(T) \iff \forall a \in S\ (f(a) \in T) \iff (\exists a \in A\ (f(a) = b) \implies b \in T) \iff f(S) \subseteq T$. □

集合 A, B について，冪集合 $2^A, 2^B$ をそれぞれ包含関係 $\subseteq$ により半順序集合と見做し，さらにそ

れにより圏と見做す．命題??により次が従う．

命題 3.

$f : A \to B$ を写像とする．$f : 2^A \to 2^B, f^{-1} : 2^B \to 2^A$ は函手であり，f は f^{-1} の左随伴である．

証明　定義より

$$S \subseteq S'(\subseteq A) \implies f(S) \subseteq f(S'),$$
$$T \subseteq T'(\subseteq B) \implies f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(T')$$

であるので，$f : 2^A \to 2^B, f^{-1} : 2^B \to 2^A$ は順序を保つ写像である．半順序集合を圏とみなしたとき，函手とは順序を保つ写像のことなので，f, f^{-1} は函手である．$S \in 2^A, T \in 2^B$ について，命題??より $\#\mathrm{Hom}(S, f^{-1}(T)) = \#\mathrm{Hom}(f(S), T) = 0, 1$ ゆえ，全単射 $\mathrm{Hom}(S, f^{-1}(T)) \to \mathrm{Hom}(f(S), T)$ が一意的に存在する．これらからなる全単射の族が S, T に関して自然であることは，半順序集合を圏と見做したときの射の定め方より直ちに従う．したがって $f \dashv f^{-1}$ である．

$$\begin{array}{c|ccc} 2^B & f(S) & \subseteq & T \\ & \uparrow & \Updownarrow & \downarrow \\ 2^A & S & \subseteq & f^{-1}(T) \end{array}$$

□

半順序による圏において，極限は下限，余極限は上限であるので，特に圏 $2^A, 2^B$ において $\bigcap, \bigcup$ はそれぞれ極限，余極限である．すなわち例えば 2^A において，部分集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ に対して，

$$\bigcap_{i \in I} U_i = \lim_{\leftarrow I} U, \quad \bigcup_{i \in I} U_i = \lim_{I \to} U$$

である．ただし $U : I \to 2^A$ は離散圏 I から 2^A への函手で，$U(i) = U_i$ なるものである．また次の事実が知られている．

事実 4.

右随伴は極限を，左随伴は余極限を保存する．

これより次の二つがわかる．

命題 5.

写像 $f : A \to B$，部分集合族 $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq 2^A, \{V_i\}_{i \in I} \subseteq 2^B$ について

$$f\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(U_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(V_i)$$

証明　f は左随伴ゆえ余極限を保存するので，

$$f\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = f(\lim_{I \to} U) = \lim_{I \to} f \circ U = \bigcup_{i \in I} f(U_i).$$

f^{-1} は右随伴ゆえ極限を保存するので,

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = f^{-1}(\lim_{\leftarrow I} V) = \lim_{\leftarrow I} f^{-1}\circ U = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

□

これによって式 (??),(??) が成り立つことがわかった．ところでもう一つ等号が成立している式 (??) がある．

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

この式はつまり，f^{-1} が余極限も保存するかもしれない，つまりなんらかの函手の左随伴になっている可能性を示唆している．実は実際にそうなっている．

定義 6.

写像 $f : A \to B$ に対して $\forall_f : 2^A \to 2^B$ を

$$\forall_f(S) = \{b \in B \mid f^{-1}(b) \subseteq S\}$$

と定め，f による S の純像という．（この純像という語は西郷甲矢人さんによる）

$S \subseteq S' \implies \forall_f(S) \subseteq \forall_f(S')$ ゆえ，$\forall_f$ は順序を保存する写像で，したがって函手である．

命題 7.

写像 $f : A \to B$，部分集合 $U \subseteq A, T \subseteq B$ について，$T \subseteq \forall_f(U) \iff f^{-1}(T) \subseteq U$.

証明 $T \subseteq \forall_f(U) \iff \forall b \in T\ (f^{-1}(b) \subseteq U) \iff f^{-1}(T) \subseteq U.$ □

これより命題??と同じようにして，f^{-1} が $\forall_f$ の左随伴であることが従う．命題??の結果も合わせてまとめると下図.

$$\begin{array}{c|ccccc}
2^B & f(S) & \subseteq & T & \subseteq & \forall_f(U) \\
 & \uparrow & \Updownarrow & \downarrow & \Updownarrow & \uparrow \\
2^A & S & \subseteq & f^{-1}(T) & \subseteq & U
\end{array}$$

これにより式 (??) も圏論的に説明することができた．すなわち f^{-1} は左随伴ゆえ余極限を保存するので

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = f^{-1}(\lim_{I\rightarrow} V) = \lim_{I\rightarrow} f^{-1}\circ V = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

となる．