分離二次拡大の決定

真中遥道（@GirlwithAHigoi）

2024 年 5 月 23 日

概要

与えられた体 K の分離二次拡大の決定の仕方について解説する．K の分離二次拡大体は K のある元の平方根を K に添加したものになるが，元の選び方によっては得られる体が一致する．実は選んだ二元がある元の二乗で同一視されるか否かでこれを判別することができる．これを用いて分離二次拡大を全て決定する．なお Arithmetic of Quadratic Forms[1] において $\mathbb{Q}_p$ の二次拡大の決定が行なわれているが，そこで用いられている議論を一般化する形で本稿の議論を得た．

本稿では体 K に対してその代数閉包を一つ固定し，K の拡大体はそれに含まれるものとして考える．

定義 1.

体 K に対して次のように定める．

- $K^\times = K \setminus \{0\}, K^{\times 2} = \{x^2 \mid x \in K^\times\}$.
- $E_K = \{L \mid L = K$ または L/K は分離二次拡大 $\}$.

$K^{\times 2}$ は $K^\times$ の部分群であることに注意する．次が本稿の目的の命題であり，分離二次拡大は $K^\times/K^{\times 2}$ を調べることで完全に記述できることを主張する．

命題 2.

K を標数が 2 でない体とする．次の写像は well-defined であり，全単射である．

$$K^\times/K^{\times 2} \ni aK^{\times 2} \mapsto K(\sqrt{a}) \in E_K$$

また E_K の異なる二元は K 同型ではない．

証明．（well-definedness） $a \in K^\times$ に対して $K(\sqrt{a}) = K$ であるか，でなければ $\sqrt{a}$ の最小多項式は $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$ であり $\operatorname{ch} K \neq 2$ なので，$K(\sqrt{a})/K$ は分離二次拡大である．$u, v \in K^\times$ に対して $uK^{\times 2} = vK^{\times 2}$ のとき，$u = a^2 v$ とおくと $K(\sqrt{u}) = K(\sqrt{a^2 v}) = K(a\sqrt{v}) = K(\sqrt{v})$ である．以上より写像は well-defined である．

（単射性） $u, v \in K^\times$ に対して $K(\sqrt{u}) = K(\sqrt{v}) = K$ なら明らかに $u, v \in K^{\times 2}$．$K(\sqrt{u}) =$

$K(\sqrt{v}) \neq K$ と仮定する．$\sqrt{u} = a\sqrt{v} + b$ なる $a, b \in K$ が存在し $a \neq 0$ である．両辺二乗し

$$u = a^2 v + 2ab\sqrt{v} + b^2$$

となるが $\{1, \sqrt{v}\}$ が K 上一次独立であるため $b = 0$．よって $u = a^2 v$ ゆえ $uK^{\times 2} = vK^{\times 2}$ であり写像は単射である．

（全射性） $L \in E_K$ とする．単拡大定理より $\alpha \in L$ が存在し $L = K(\alpha)$ となる．$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ なる $a, b \in K$ が存在する．$\beta = \alpha + a/2$ とおくと $\beta = \sqrt{a^2/4 - b}$ であり $L = K(\beta)$ である．よって写像は全射である．

（K 同型でないこと） K 同型 $f : K(\sqrt{u}) \to K(\sqrt{v})$ が存在するとすると $f(\sqrt{u}) = a\sqrt{v} + b$ なる $a, b \in K$ が存在し，これより $u = a^2 v + b$ を得る．先と同様に $uK^{\times 2} = vK^{\times 2}$ であるので $K(\sqrt{u}) = K(\sqrt{v})$ である． □

例 3. $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ は分離二次拡大であり位数 4 の体は $\mathbb{F}_4$ のみゆえ $E_{\mathbb{F}_2} = \{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4\}$ である．しかし ${\mathbb{F}_2}^{\times}/{\mathbb{F}_2}^{\times 2} = \{1\}/\{1\} = \{1\}$ ゆえ，よってこれらに一対一対応はない．よって標数が 2 の場合には命題 2 は成り立たない．

命題 2 を用いて $\mathbb{Q}$ の二次拡大を決定する．

命題 4.

$S = \{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid n \text{ は square free}\}$ とおく．$E_{\mathbb{Q}} = \{\mathbb{Q}(\sqrt{n}) \mid n \in S\}$ であり，これらは互いに同型ではない．

証明. $\mathbb{Q}$ の標数は 0 であり完全体なので，命題 2 より $\mathbb{Q}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times 2}$ が S を完全代表系にもつことを見れば良い．$a/b \in \mathbb{Q}^{\times}$ に対して $(a/b)K^{\times 2} = (ab)K^{\times 2}$ である．素因数分解を考えることで任意の 0 でない整数はある S の元と同値であり，また S のどの二元も同値でないと分かる．よって S は $\mathbb{Q}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times 2}$ の完全代表系である． □

二次体を考えるときによく平方因子を持たない整数の平方根を $\mathbb{Q}$ に添加した体を考えるが，この命題からそれで二次体の一般論をカバーできていることがわかる．

参考文献

[1] Goro Shimura. Arithmetic of Quadratic Forms. 2010