一般化蛇の補題

京都大学理学部　＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊　＊＊＊＊

2023 年 8 月 28 日

1　はじめに

本稿では蛇の補題を一般化する．[1] ではより整理された議論がされているが，素朴な証明を与えているという点で本稿にはオリジナリティがあると考える．本記事を読むにあたって，以下に注意されたい．

- 環 R を固定し，加群は R 上とする．
- 可換図式の横の並びを行，縦の並びを列と呼ぶ．（行列を扱う際と同様である）
- n は 2 以上の自然数とする．
- 図式中に現れる点線は見やすさのために引かれた補助線であり，特別な意味はない．

2　一般化蛇の補題

2.1　主張と方針

最初に一般化蛇の補題の主張を記す．

2　一般化蛇の補題

定理 1. 一般化蛇の補題

下図のような，0 を無視すると $n \times (n+1)$ の格子状になる加群の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & A_{1,1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_{1,2} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_{1,3} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & \cdots \arrow[r] & A_{1,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{2,1} \arrow[r] \arrow[d] & A_{2,2} \arrow[r] \arrow[d] & A_{2,3} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A_{2,n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\vdots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \\
0 \arrow[r] & A_{n-1,1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & A_{n-1,2} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"] & A_{n-1,3} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"] & \cdots \arrow[r] & A_{n-1,n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n,1} \arrow[r] & A_{n,2} \arrow[r] & A_{n,3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "g"] & A_{n,n+1} &
\end{tikzcd}
$$

各行，各列が完全列であるとき，以下ような核，余核に関連した完全列が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\alpha_1 \arrow[r, "f'"] & \operatorname{Ker}\alpha_2 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\alpha_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \operatorname{Ker}\alpha_{n+1} \arrow[dllll, "d"] \\
\operatorname{Coker}\beta_1 \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta_2 \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "g'"] & \operatorname{Coker}\beta_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

さらに，f が単射なら f' も単射，g が全射なら g' も全射である．

一般の n で示すと単に煩雑になるので，今回は $n = 3$ の場合に示す．証明を詳細に追えば $n = 3$ の場合と全く同様にして一般の n でも示せることがわかる．

命題 2. 一般化蛇の補題（$n = 3$ の場合）

下図のような，0 を無視すると 3×4 の格子状になる加群の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & D_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & C_3 \arrow[r, "h_3"] & D_3 &
\end{tikzcd}$$

各行，各列が完全列であるとき，以下ような核，余核に関連した完全列が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\alpha_1 \arrow[r, "{f_1}'"] & \operatorname{Ker}\beta_1 \arrow[r, "{g_1}'"] & \operatorname{Ker}\gamma_1 \arrow[r, "{h_1}'"] & \operatorname{Ker}\delta_1 \arrow[dlll, rounded corners, "d"'] \\
\operatorname{Coker}\alpha_2 \arrow[r, "{f_3}'"] & \operatorname{Coker}\beta_2 \arrow[r, "{g_3}'"] & \operatorname{Coker}\gamma_2 \arrow[r, "{h_3}'"] & \operatorname{Coker}\delta_2
\end{tikzcd}$$

さらに，f_1 が単射なら ${f_1}'$ も単射，h_3 が全射なら ${h_3}'$ も全射である．

証明を以下の流れで行う．

1. ${f_1}', {g_1}', {h_1}', {f_3}', {g_3}', {h_3}'$ を定義し，$\operatorname{Ker}\beta_1, \operatorname{Ker}\gamma_1, \operatorname{Coker}\beta_2, \operatorname{Coker}\gamma_2$ での完全性を示す．
2. d を定義する．
3. $\operatorname{Ker}\delta_1, \operatorname{Coker}\alpha_2$ での完全性を示す．

証明において図 3 の図式に補題を用いることがある．ただし $\iota_A, \iota_B, \iota_C, \iota_D$ は包含写像，$\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D$ は射影である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\alpha_1 \arrow[r, "{f_1}'"] \arrow[d, hook, "\iota_A"] & \operatorname{Ker}\beta_1 \arrow[r, "{g_1}'"] \arrow[d, hook, "\iota_B"] & \operatorname{Ker}\gamma_1 \arrow[r, "{h_1}'"] \arrow[d, hook, "\iota_C"] & \operatorname{Ker}\delta_1 \arrow[d, hook, "\iota_D"] & \\
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & D_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\pi_A"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "\pi_B"] & C_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d, "\pi_C"] & D_3 \arrow[d, "\pi_D"] & \\
 & \operatorname{Coker}\alpha_2 \arrow[r, "{f_3}'"] & \operatorname{Coker}\beta_2 \arrow[r, "{g_3}'"] & \operatorname{Coker}\gamma_3 \arrow[r, "{h_3}'"] & \operatorname{Coker}\delta_3 &
\end{tikzcd}
$$

図 3.

2.2　d 以外の写像の定義と完全性

写像の定義

${h_1}', {f_3}'$ の定義のみのべる．d 以外の他の写像も同様に定義する．${h_1}' : \operatorname{Ker}\gamma_1 \to \operatorname{Ker}\delta_1, {f_3}' : \operatorname{Coker}\alpha_2 \to \operatorname{Coker}\beta_2$ を

$$
{h_1}'(c_1) = h_1(c_1), \quad {f_3}'([a_3]) = [f_3(a_3)]
$$

で定義する．ただし $[\cdot]$ は同値類を表す．well-defined であることを確かめる．まず ${h_1}'$ について．$c_1 \in \operatorname{Ker}\gamma_1$ なら可換性から $\delta_1(h_1(c_1)) = h_2(\gamma_1(c_1)) = 0$ ゆえ，${h_1}' : \operatorname{Ker}\gamma_1 \to \operatorname{Ker}\delta_1$ として定まっている．次に ${f_3}'$ について．$[a_3] = [a_3']$ なら $\alpha_2(a_2) = a_3 - a_3'$ なる $a_2 \in A_2$ が存在する．

$$
f_3(a_3) - f_3(a_3') = f_3(a_3 - a_3') = f_3(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) \in \operatorname{Im}\beta_2
$$

ゆえ $[f_3(a_3)] = [f_3(a_3')]$．定め方より ${h_1}', {f_3}'$ は準同型である．

${f_1}', {h_3}'$ について，定め方より f_1 が単射なら ${f_1}'$ も単射，h_3 が全射なら ${h_3}'$ も全射である．よって命題 2 の最後の主張が従う．

完全性

まず補題を二つ示す．

補題 4.

各行が完全列な加群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\eta"] & Z_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\zeta"] & W_1 \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \arrow[r, "g_2"'] & Z_2 &
\end{tikzcd}$$

において元が

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dashed] & z_1 \arrow[r, mapsto, "h_1"] \arrow[d, mapsto, "\zeta"] & 0 \\
{} \arrow[r, dash, dashed] & {} \arrow[r, dash, dashed] & 0 &
\end{tikzcd}$$

と写されているとする．このとき $y_1 \in Y_1, x_2 \in X_2, y_2 \in Y_2$ が存在し

$$\begin{tikzcd}
 & y_1 \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "\eta"] & z_1 \arrow[r, mapsto, "h_1"] \arrow[d, mapsto, "\zeta"] & 0 \\
x_2 \arrow[r, mapsto, "f_2"'] & y_2 \arrow[r, mapsto, "g_2"'] & 0 &
\end{tikzcd}$$

となる.

証明　略. □

補題 4 中の一つ目の図式と仮定を満たす元の組を $(Y_1, Z_1, W_1; X_2, Y_2, Z_2 : z_1)$，得られる元の組を (y_1, x_2, y_2) と書くことにする.

補題 5.

各行が完全列な加群の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\xi"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\eta"] & Z_1 \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 &
\end{tikzcd}
$$

において元が

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, mapsto, "\xi"] & y_1 \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "\eta"] & z_1 \\
x_2 \arrow[r, mapsto, "f_2"'] & y_2 &
\end{tikzcd}
$$

と写されているとする．このとき

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed, no head] \arrow[d, dashed, no head] & y_1 - f_1(x_1) \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "\eta"] & z_1 \\
{} \arrow[r, dashed, no head] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

となる．

証明　略． □

補題 5 中の一つ目の図式と仮定を満たす元を合わせて $(X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2 : x_1, y_1)$ と書くことにする．

完全性の証明に移る．$\operatorname{Ker}\gamma_1, \operatorname{Coker}\beta_2$ での完全性のみ調べる．他も同様に調べられる．まず $\operatorname{Ker}\gamma_1$ について．元の図式の完全性から ${h_1}' \circ {g_1}' = 0$ ゆえ $\operatorname{Im}{g_1}' \subseteq \operatorname{Ker}h_1$．逆の包含を補題 4,5 を用いて示す．$c_1 \in \operatorname{Ker}{h_1}' = \operatorname{Ker}h_1 \cap \operatorname{Ker}\gamma_1$ を任意にとる．補題 4 を図式 $(B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2 : c_1)$ に用いて (b_1, a_2, b_2) を得る．$b_2 \in \operatorname{Im}\beta_1 = \operatorname{Ker}\beta_2$ であるので再び補題 4 を図式 $(A_2, B_2, C_2; 0, A_3, B_3 : b_2)$ に用いて $(0, a_2, a_3)$ を得る．0 の像ゆえ $a_3 = 0$．よって $a_2 \in \operatorname{Ker}\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha_1$．$a_1 \in {\alpha_1}^{-1}(a_2)$ を一つとる．補題 5 を図式 $(A_1, B_1, C_1; A_2, B_2 : a_1, b_1)$ に用いて $b_1 - f_1(a_1) \in {g_1}^{-1}(c_1) \cap \operatorname{Ker}\beta_1 = {h_1}'^{-1}(c_1)$ を得る．よって $c_1 \in \operatorname{Im}{g_1}'$ であり，したがって $\operatorname{Im}{g_1}' \supseteq \operatorname{Ker}{h_1}'$．（図 6）

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & D_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & C_3 \arrow[r, "h_3"] & D_3 &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "\alpha_1"] & b_1 \arrow[r, mapsto, "g_1"] \arrow[d, mapsto, "\beta_1"] & c_1 \arrow[r, mapsto, "h_1"] \arrow[d, mapsto, "\gamma_1"] & 0 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dashed] & {} \\
{} \arrow[r, dash, dashed] & a_2 \arrow[r, mapsto, "f_2"] \arrow[d, mapsto, "\alpha_2"] & b_2 \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto, "\beta_2"] & 0 \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dashed] & {} \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dashed] & {} \\
0 \arrow[r, mapsto] & a_3 = 0 \arrow[r, mapsto, "f_3"] & 0 \arrow[r, dash, dashed] & {} \arrow[r, dash, dashed] & {} &
\end{tikzcd}
$$

図 6.

次に $\mathrm{Coker}\,\beta_2$ について．元の図式の完全性より ${g_3}' \circ {f_3}' = 0$ ゆえ $\mathrm{Im}\,{f_3}' \subseteq \mathrm{Ker}\,{g_3}'$．逆の包含を補題 4,5 を用いて示す．（図式を転置した形で用いることに注意）$[b_3] \in \mathrm{Ker}\,{g_3}'$ を任意にとる．$c_3 = g_3(b_3)$ とおく．補題 4 を図式 $(C_2, C_3, \mathrm{Coker}\,\gamma_2; D_1, D_2, D_3 : c_3)$ に用いて (c_2, d_1, d_2) を得る．（図 7）h_1 は全射ゆえ $c_1 \in {h_1}^{-1}(d_1)$ が存在する．補題 5 を図式 $(C_1, C_2, C_3; D_1, D_2 : c_1, c_2)$ に用いて ${c_2}' = c_2 - \gamma_1(c_1) \in {\gamma_2}^{-1}(c_3) \cap \mathrm{Ker}\,h_2$ を得る．${c_2}' \in \mathrm{Ker}\,h_2 = \mathrm{Im}\,g_2$ ゆえ $b_2 \in {g_2}^{-1}({c_2}')$ が存在する．（図 8）再び補題 5 を図式 $(B_2, B_3, \mathrm{Coker}\,\beta_2; C_2, C_3 : b_2, b_3)$ に用いて ${b_3}' = b_3 - \beta_2(b_2) \in {\pi_B}^{-1}([b_3]) \cap \mathrm{Ker}\,g_3$ を得る．（図 9）${b_3}' \in \mathrm{Ker}\,g_3 = \mathrm{Im}\,f_3$ ゆえ $a_3 \in {f_3}^{-1}({b_3}')$ が存在する．${f_3}'([a_3]) = [f_3(a_3)] = [b_3]$ ゆえ $[b_3] \in \mathrm{Im}\,{f_3}'$．したがって $\mathrm{Im}\,{f_3}' \supseteq \mathrm{Ker}\,{g_3}'$．　□

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & D_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "\pi_B"] & C_3 \arrow[r, "h_3"] \arrow[d] & D_3 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Coker}\,\alpha_2 \arrow[r, "{f_3}'"] & \mathrm{Coker}\,\beta_2 \arrow[r, "{g_3}'"] & \mathrm{Coker}\,\gamma_2 \arrow[r, "{h_3}'"] & \mathrm{Coker}\,\delta_2 &
\end{tikzcd}
$$

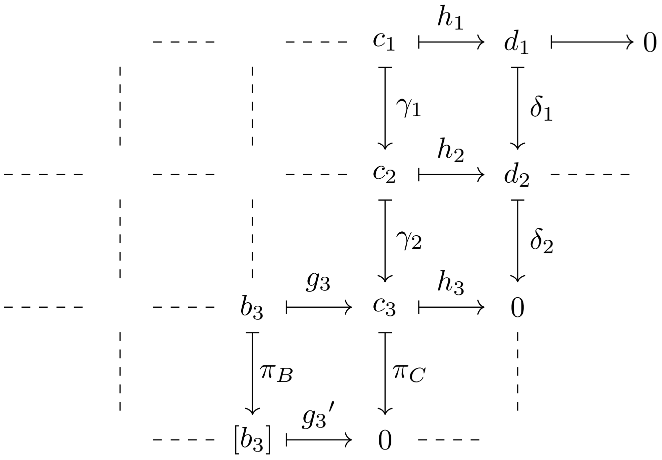
c_1 $\xrightarrow{h_1}$ d_1 $\longrightarrow$ 0
γ_1 δ_1
c_2 $\xrightarrow{h_2}$ d_2
γ_2 δ_2
b_3 $\xrightarrow{g_3}$ c_3 $\xrightarrow{h_3}$ 0
π_B π_C
$[b_3]$ $\xrightarrow{g_3{}'}$ 0

図 7.

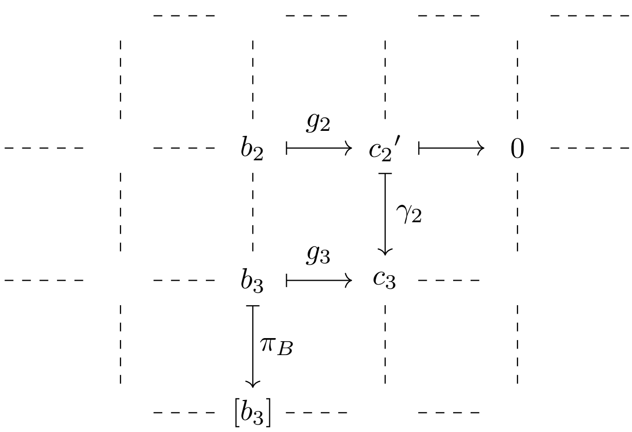
b_2 $\xrightarrow{g_2}$ $c_2{}'$ $\longrightarrow$ 0
γ_2
b_3 $\xrightarrow{g_3}$ c_3
π_B
$[b_3]$

図 8.

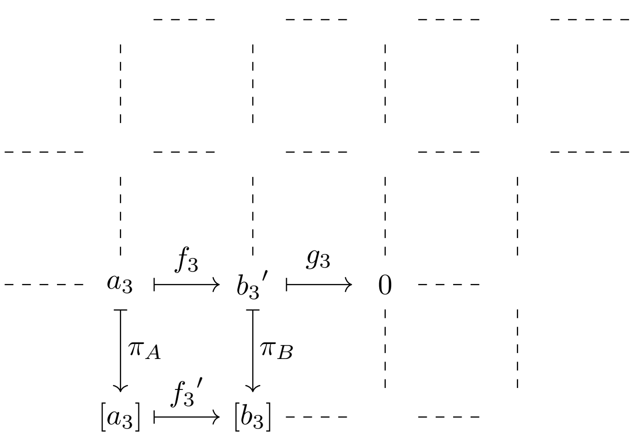
a_3 $\xrightarrow{f_3}$ $b_3{}'$ $\xrightarrow{g_3}$ 0
π_A π_B
$[a_3]$ $\xrightarrow{f_3{}'}$ $[b_3]$

図 9.

補題 4,5 を繰り返し用いることで，この証明と同様に一般の n でも示せることを指摘しておく．

2.3　d の定義

d の定義を与えるために，まず次のように写像を定める．

命題 10.

各行，各列が完全列である加群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\eta_1"] & Z_1 \arrow[d, "\zeta_1"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\eta_2"] & Z_2 \arrow[d, "\zeta_2"] \\
 & Y_3 \arrow[r, "g_3"] & Z_3
\end{tikzcd}$$

に対して

$$\widetilde{Z_2} = (\mathrm{Im}\, g_2 \cap \mathrm{Im}\, \zeta_1)/\, \mathrm{Im}(\zeta_1 \circ g_1), \qquad \widetilde{Y_3} = (\mathrm{Ker}\, g_3 \cap \mathrm{Im}\, \eta_2)/\, \mathrm{Im}(\eta_2 \circ f_2)$$

とする．$\phi : \widetilde{Z_2} \to \widetilde{Y_3}$ を，$[z_2] \in \widetilde{Z_2}$ に対して $y_2 \in {g_2}^{-1}(z_2)$ を用いて，$\phi([z_2]) = [\eta_2(y_2)] \in \widetilde{Y_3}$ とすることで定める．

$$\begin{tikzcd}
y_2 \arrow[r, mapsto, "g_2"] \arrow[d, mapsto, "\eta_2"] & z_2 \arrow[dr, mapsto] & \\
\eta_2(y_2) \arrow[dr, mapsto] & & {[z_2]} \arrow[dl, mapsto, bend left, "\phi"] \\
 & {[\eta_2(y_2)]} &
\end{tikzcd}$$

ϕ は well-defined で加群の準同型である．

証明　略．　□

命題 10 中の図式を $(Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; Y_3, Z_3)$ と書くことにする．

$d : \operatorname{Ker}\delta_1 \to \operatorname{Coker}\alpha_2$ を定義する．まず命題 10 を図式

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{Ker}\gamma_1, \operatorname{Ker}\delta_1; B_1, C_1, D_1; C_2, D_2),\\
&(B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; B_3, C_3),\\
&(A_2, B_2; 0, A_3, B_3; \operatorname{Coker}\alpha_2, \operatorname{Coker}\beta_2)
\end{aligned}
$$

に用いて写像 $\phi_D : \widetilde{D_1} \to \widetilde{C_2}$，$\phi_C : \widetilde{C_2} \to \widetilde{B_3}$，$\phi_B : \widetilde{B_3} \to \widetilde{\operatorname{Coker}\alpha_2}$ を得る．ここで $\operatorname{Im}(0 \to A_3 \to \operatorname{Coker}\alpha_2) = 0$ ゆえ $\widetilde{\operatorname{Coker}\alpha_2} \subseteq \operatorname{Coker}\alpha_2$ であることに注意する．$p : \operatorname{Ker}\delta_1 \to \widetilde{D_1}$ を包含写像と射影を合成したもの，$i : \widetilde{\operatorname{Coker}\alpha_2} \to \operatorname{Coker}\alpha_2$ を包含写像とする．これらを用いて $d = i \circ \phi_B \circ \phi_C \circ \phi_D \circ p$，すなわち

$$
\operatorname{Ker}\delta_1 \xrightarrow{d} \operatorname{Coker}\alpha_2 = \operatorname{Ker}\delta_1 \xrightarrow{p} \widetilde{D_1} \xrightarrow{\phi_D} \widetilde{C_2} \xrightarrow{\phi_C} \widetilde{B_3} \xrightarrow{\phi_B} \widetilde{\operatorname{Coker}\alpha_2} \xrightarrow{i} \operatorname{Coker}\alpha_2
$$

と定める．C_2 での行の完全性より

$$
\operatorname{Codom}\phi_D = (\operatorname{Im} g_2 \cap \operatorname{Im}\gamma_1)/\operatorname{Im}(\gamma_1 \circ g_1) = (\operatorname{Ker} h_2 \cap \operatorname{Im}\gamma_1)/\operatorname{Im}(\gamma_1 \circ g_1) = \operatorname{Dom}\phi_C
$$

であり，$\widetilde{B_3}$ についても同様で，ゆえに合成は well-defined である．一般の n でも同様に定義できることを指摘しておく．具体的に $d_1 \in \operatorname{Ker}\delta_1$ の像 $d(d_1) = [a_3]$ は，命題 10 の ϕ の定義を思い出し代表元に注目することで，図 12 のように

$$
d_1 \longrightarrow c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow a_3 \longrightarrow [a_3]
$$

と，像を取る操作と逆像の中から元を取る操作を繰り返すことで得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \operatorname{Ker}\gamma_1 \arrow[r, "{h_1}'"] \arrow[d, hook, "\iota_C"] & \operatorname{Ker}\delta_1 \arrow[d, hook, "\iota_D"] & \\
 & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & C_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & C_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & D_2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\pi_A"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "\pi_B"] & C_3 \arrow[r, "h_3"] & D_3 & \\
 & \operatorname{Coker}\alpha_2 \arrow[r, "{f_3}'"] & \operatorname{Coker}\beta_2 & & &
\end{tikzcd}
$$

図 11.

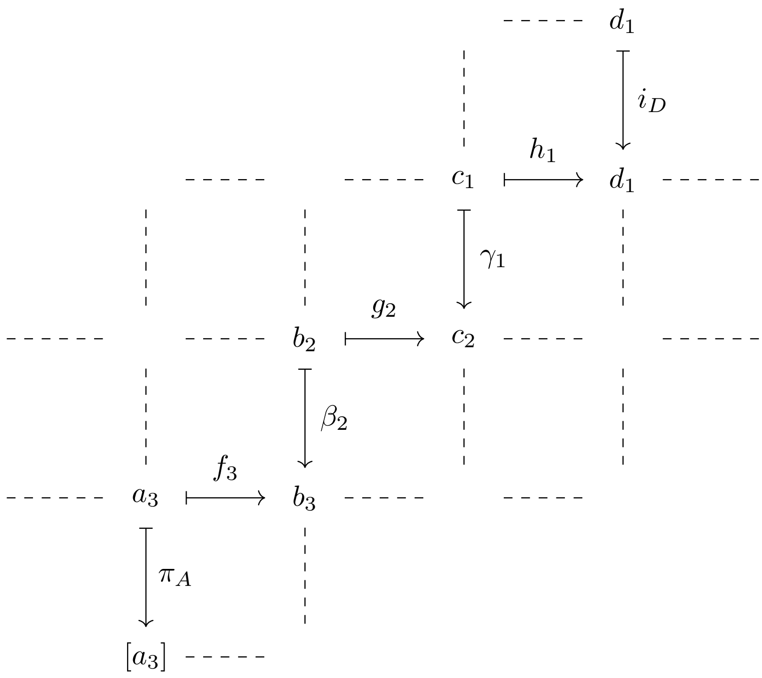

図 12.

2.4 $\operatorname{Ker}\delta_1, \operatorname{Coker}\alpha_2$ での完全性

順に $\operatorname{Ker}\delta_1, \operatorname{Coker}\alpha_2$ での完全性を示す.

$\operatorname{Ker}\delta_1$ での完全性

図 12 のようにして $d_1 \in \operatorname{Ker}\delta_1$ の d による像 $[a_3] \in \operatorname{Coker}\alpha_2$ が決まっているとする.

$d_1 \in \operatorname{Im}{h_1}'$ とすると，ある $c'_1 \in \operatorname{Ker}\gamma_1$ が存在して ${h_1}'(c'_1) = d_1$，すなわち $h_1(c'_1) = d_1$ となる. well-definedness より $c_1 = c'_1$ として良い，つまり $c_1 \in \operatorname{Ker}\gamma_1$ と取れる．よって $c_2 = 0$ となる. 同様にして $b_2 = 0, b_3 = 0, a_3 = 0$ として取れ，したがって $[a_3] = 0$ となる．よって $d_1 \in \operatorname{Ker} d$. ゆえに $\operatorname{Im}{h_1}' \subseteq \operatorname{Ker} d$.

逆の包含を示す．$d_1 \in \operatorname{Ker} d$，すなわち $[a_3] = 0$ とする．$a_3 \in \operatorname{Ker}\pi_A = \operatorname{Im}\alpha_2$ ゆえ $a_2 \in {\alpha_2}^{-1}(a_3)$ が存在する．補題 5 を図式 $(A_2, B_2, C_2; A_3, B_3 : a_2, b_2)$ に用いると，$\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0, g_2(b_2 - f_2(a_2)) = c_2$ と分かる．よって well-definedness より，$b_2 \to b_2 - f_2(a_2), b_3 \to 0, a_3 \to 0$ と置き換えることを考え $b_2 \in \operatorname{Ker}\beta_2, b_3 = 0, a_3 = 0$ と取ることができる．$b_3 = 0$ としたのでもう一度同様の議論ができ，$c_1 \in \operatorname{Ker}\gamma_1, c_2 = 0, b_2 = 0$ と取ることができる．これより $h_1(c_1) = d_1, c_1 \in \operatorname{Ker}\gamma_1$ となる $c_1 \in C_1$ が取れたので，$d_1 \in \operatorname{Im}{h_1}'$．よって $\operatorname{Im}{h_1}' \supseteq \operatorname{Ker} d$. □

$\mathrm{Coker}\,\alpha_2$ での完全性

図 12 のようにして $d_1 \in \mathrm{Ker}\,\delta_1$ の d による像 $[a_3] \in \mathrm{Coker}\,\alpha_2$ が決まっているとする．${f_3}'([a_3]) = [f_3(a_3)] = [\beta_2(b_2)] = 0$ ゆえ ${f_3}'(d(d_1)) = 0$．よって $\mathrm{Im}\,d \subseteq \mathrm{Ker}\,{f_3}'$.

逆の包含を示す．$[a_3] \in \mathrm{Ker}\,f_3'$ とする．（ここでは図 12 のようになっているとは限らないことに注意せよ．むしろ図 12 を満たすように元が取れることを示す）図 11 の第 1 列に $\mathrm{Coker}\,\alpha_2 \to 0$ を加えるとこれは再び完全列．補題 4 を図式 $(A_3, \mathrm{Coker}\,\alpha_2, 0; B_2, B_3\,\mathrm{Coker}\,\beta_2 : [a_3])$ に用いて (a_3, b_2, b_3) を得る．$b_3 \in \mathrm{Ker}\,\pi_B \cap \mathrm{Im}\,f_3 = \mathrm{Ker}\,\pi_B \cap \mathrm{Ker}\,g_3$ ゆえ，再び補題 4 を図式 $(B_2, B_3, \mathrm{Coker}\,\beta_2; C_1, C_2, C_3 : b_3)$ に用いて (b_2, c_1, c_2) を得る．同様に補題 4 を図式 $(C_1, C_2, C_3; \mathrm{Ker}\,\delta_1, D_1, D_2 : c_2)$ に用いて (c_1, d_1, d_1) を得る．$[a_3], a_3, b_3, b_2, c_2, c_1, d_1$ は図 12 を満たす．よって $d(d_1) = [a_3]$ ゆえ $[a_3] \in \mathrm{Im}\,d$．したがって $\mathrm{Im}\,d \supseteq \mathrm{Ker}\,{f_3}'$. □

同様の議論で一般の n でも示すことができることを指摘しておく．

以上で一般化蛇の補題の $n = 3$ の場合の証明が完了した．さらに与えた証明を詳細に追うことで，何度か指摘したように一般の n でも同様の議論ができること，そしてそれによって一般化蛇の補題の証明が与えられることが分かる．また一般化蛇の補題を用いることで，九項補題の一般化を示すことができる．

参考文献

[1] George M. Bergman, *On diagram-chasing in double complexes*, 2012, `https://arxiv.org/abs/1108.0958`（最終確認 2023 年 6 月 23 日）