

# 一般化蛇の補題と $n^2$ 項補題

真中遥道

@GirlwithAHigoi

2022 年 12 月 12 日

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \cdots \cdots \rightarrow & \text{Ker } \alpha_1 & \xrightarrow{f_1'} & \text{Ker } \beta_1 & \xrightarrow{g_1'} & \text{Ker } \gamma_1 & \xrightarrow{h_1'} & \text{Ker } \delta_1 & \cdots \cdots \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \iota_A & & \downarrow \iota_B & & \downarrow \iota_C & & \downarrow \iota_D & & \\
 0 & \cdots \cdots \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 & & \\
 0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & C_3 & \xrightarrow{h_3} & D_3 & \cdots \cdots \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \pi_A & & \downarrow \pi_B & & \downarrow \pi_C & & \downarrow \pi_D & & \\
 & & \downarrow f_3' & & \downarrow g_3' & & \downarrow h_3' & & & & \\
 & \longrightarrow & \text{Coker } \alpha_2 & \longrightarrow & \text{Coker } \beta_2 & \longrightarrow & \text{Coker } \gamma_3 & \longrightarrow & \text{Coker } \delta_3 & \cdots \cdots \rightarrow & 0
 \end{array}$$

## 目次

0	注意	3
1	はじめに	3
2	一般化蛇の補題	4
2.1	主張と方針 . . . . .	4
2.2	$d$ 以外の写像の定義と完全性 . . . . .	7
2.3	$d$ の定義 . . . . .	12
2.4	$\text{Ker } \delta_1, \text{Coker } \alpha_2$ での完全性 . . . . .	15
3	$n^2$ 項補題	15
4	おわりに	17

## 0 注意

本記事を読むにあたって，以下に注意されたい．

- 環  $R$  を固定し，加群は  $R$  上とする．
- 可換図式の横の並びを行，縦の並びを列と呼ぶ．（行列を扱う際と同様である）
- $n$  は 2 以上の自然数とする．
- 図式中に現れる点線は見やすさのために引かれた補助線であり，特別な意味はない．

## 1 はじめに

幾何学演義 II の授業にて九項補題を証明する問題が出された．九項補題とは次のようなものである．

### 定理 1. 九項補題

下図のような加群の可換図式を考える．各列は完全列であるとする．

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & C_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

このとき，次が成り立つ．

1. 下 2 行が完全列なら，上の 1 行も完全列．
2. 上 2 行が完全列なら，下の 1 行も完全列．

実はこの九項補題は蛇の補題を使うと簡単に示すことができる．蛇の補題とは次のようなものである．

**定理 2. 蛇の補題**

下図のような加群の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2
 \end{array}$$

各行が完全列であるとき, 以下のような核, 余核に関連した完全列が存在する.

$$\text{Ker } \alpha \xrightarrow{f_1'} \text{Ker } \beta \xrightarrow{g_1'} \text{Ker } \gamma \xrightarrow{d} \text{Coker } \alpha \xrightarrow{f_2'} \text{Coker } \beta \xrightarrow{g_2'} \text{Coker } \gamma$$

さらに,  $f_1$  が単射なら  $f_1'$  も単射,  $g_2$  が全射なら  $g_2'$  も全射である.\*<sup>1</sup>

この蛇の補題を九項補題の仮定にある完全な二行に適用すると九項補題を示すことができる. 私が授業でこの問題を示した際に, 担当の K 先生が「誰か暇だったら一般化して  $n^2$  補題を示してください」とおっしゃっていたので挑戦してみたところ, 一般化版を証明することができた. 本記事ではその証明を記す.

## 2 一般化蛇の補題

### 2.1 主張と方針

九項補題の証明を見れば蛇の補題が強い働きをしていることに気づくだろう. そこでまず蛇の補題を一般化し, それを九項補題の際に行ったように適用することで  $n^2$  項補題を示す. 最初に一般化蛇の補題の主張を記す.

\*<sup>1</sup> これは最初の可換図式の行に  $0 \rightarrow A_1, C_2 \rightarrow 0$  という部分が加えられれば, 得られる完全列にそれぞれ  $0 \rightarrow \text{Ker } \alpha, \text{Coker } \gamma \rightarrow 0$  という部分を加えても, また完全列になっているという意味である.

**定理 3. 一般化蛇の補題**

下図のような, 0 を無視すると  $n \times (n + 1)$  の格子状になる加群の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A_{1,1} & \xrightarrow{f} & A_{1,2} & \longrightarrow & A_{1,3} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{1,n+1} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & A_{2,1} & \longrightarrow & A_{2,2} & \longrightarrow & A_{2,3} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{2,n+1} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1,1} & \longrightarrow & A_{n-1,2} & \longrightarrow & A_{n-1,3} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1,n+1} \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_3 & & \downarrow \beta_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & A_{n,1} & \longrightarrow & A_{n,2} & \longrightarrow & A_{n,3} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{g} A_{n,n+1}
 \end{array}$$

各行, 各列が完全列であるとき, 以下のような核, 余核に関連した完全列が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker } \alpha_1 & \xrightarrow{f'} & \text{Ker } \alpha_2 & \longrightarrow & \text{Ker } \alpha_3 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \text{Ker } \alpha_{n+1} \\
 & & & & & & \downarrow d \\
 \text{Coker } \beta_1 & \longrightarrow & \text{Coker } \beta_2 & \longrightarrow & \text{Coker } \beta_3 & \longrightarrow & \cdots \xrightarrow{g'} \text{Coker } \beta_{n+1}
 \end{array}$$

さらに,  $f$  が単射なら  $f'$  も単射,  $g$  が全射なら  $g'$  も全射である.\*2

蛇の補題は 2 行 3 列の可換図式に対しての主張であったが, それを  $n$  行  $n + 1$  列の可換図式に対しての主張に一般化する, ということだ. 一般の  $n$  で示そうとすると単に煩雑になるだけなので, 今回は  $n = 3$  の場合に示す. 証明を詳細に追えば  $n = 3$  の場合と全く同様にして一般の  $n$  でも示せることがわかるだろう.  $n = 3$  の場合の主張を記しておく.

\*2 定理 2 と同様, 図式の言葉でも解釈できる.

**命題 4. 一般化蛇の補題 ( $n = 3$  の場合)**

下図のような, 0 を無視すると  $3 \times 4$  の格子状になる加群の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 & & \\
 0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & C_3 & \xrightarrow{h_3} & D_3 & & 
 \end{array}$$

各行, 各列が完全列であるとき, 以下のような核, 余核に関連した完全列が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker } \alpha_1 & \xrightarrow{f_1'} & \text{Ker } \beta_1 & \xrightarrow{g_1'} & \text{Ker } \gamma_1 & \xrightarrow{h_1'} & \text{Ker } \delta_1 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & d \\
 & & & & & & \downarrow \\
 \text{Coker } \alpha_2 & \xrightarrow{f_3'} & \text{Coker } \beta_2 & \xrightarrow{g_3'} & \text{Coker } \gamma_2 & \xrightarrow{h_3'} & \text{Coker } \delta_2
 \end{array}$$

さらに,  $f_1$  が単射なら  $f_1'$  も単射,  $h_3$  が全射なら  $h_3'$  も全射である.

証明を以下の流れで行う.

1.  $f_1', g_1', h_1', f_3', g_3', h_3'$  を定義し,  $\text{Ker } \beta_1, \text{Ker } \gamma_1, \text{Coker } \beta_2, \text{Coker } \gamma_2$  での完全性を示す.
2.  $d$  を定義する.
3.  $\text{Ker } \delta_1, \text{Coker } \alpha_2$  での完全性を示す.

証明において図 5 の図式に補題を用いることがある. 命題 4 中の可換図式が各列完全列なら, 図 5 の図式も可換で各列が完全列であることを今のうちに注意しておく. ただし  $\iota_A, \iota_B, \iota_C, \iota_D$  は包含写像,  $\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D$  は射影である. これは一般の  $n$  でも成り立つ. (元の図式の各行が完全列なら図 5 の図式の各行も完全列になるが, これは 2.2 で行う証明からしたがう)

$$\begin{array}{ccccccc}
& \text{Ker } \alpha_1 & \xrightarrow{f_1'} & \text{Ker } \beta_1 & \xrightarrow{g_1'} & \text{Ker } \gamma_1 & \xrightarrow{h_1'} & \text{Ker } \delta_1 \\
& \downarrow \iota_A & & \downarrow \iota_B & & \downarrow \iota_C & & \downarrow \iota_D \\
& A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D_2 \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 \\
0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & C_3 & \xrightarrow{h_3} & D_3 \\
& \downarrow \pi_A & & \downarrow \pi_B & & \downarrow \pi_C & & \downarrow \pi_D \\
& \text{Coker } \alpha_2 & \rightarrow & \text{Coker } \beta_2 & \rightarrow & \text{Coker } \gamma_3 & \rightarrow & \text{Coker } \delta_3
\end{array}$$

図 5.

## 2.2 $d$ 以外の写像の定義と完全性

### 写像の定義

$h_1', f_3'$  の定義のみのべる.  $d$  以外の他の写像も同様に定義する.  $h_1' : \text{Ker } \gamma_1 \rightarrow \text{Ker } \delta_1, f_3' : \text{Coker } \alpha_2 \rightarrow \text{Coker } \beta_2$  を

$$h_1'(c_1) = h_1(c_1), \quad f_3'([a_3]) = [f_3(a_3)]$$

で定義する. ただし  $[\cdot]$  は同値類を表す. well-defined であることを確かめる. まず  $h_1'$  について.  $c_1 \in \text{Ker } \gamma_1$  なら可換性から  $\delta_1(h_1(c_1)) = h_2(\gamma_1(c_1)) = 0$  ゆえ  $h_1(c_1) \in \text{Ker } \delta_1$  となっており,  $h_1' : \text{Ker } \gamma_1 \rightarrow \text{Ker } \delta_1$  として定まっている. 次に  $f_3'$  について.  $[a_3] = [a'_3]$  なら  $\alpha_2(a_2) = a_3 - a'_3$  なる  $a_2 \in A_2$  が存在する.

$$f_3(a_3) - f_3(a'_3) = f_3(a_3 - a'_3) = f_3(\alpha_2(a_2)) = \beta_2(f_2(a_2)) \in \text{Im } \beta_2$$

ゆえ  $[f_3(a_3)] = [f_3(a'_3)]$ . 定め方より  $h_1', f_3'$  は準同型である.

$f_1', h_3'$  について, 定め方より  $f_1$  が単射なら  $f_1'$  も単射,  $h_3$  が全射なら  $h_3'$  も全射である. よって命題 4 の最後の主張が従う.

### 完全性

まず補題を二つ示す.

## 補題 6.

各行が完全列な加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \xrightarrow{h_1} & W_1 \\
 \downarrow \eta & & \downarrow \zeta & & \\
 X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Z_2
 \end{array}$$

において元が

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \cdots & z_1 & \xrightarrow{h_1} & 0 \\
 & & \vdots & \downarrow \zeta & & \\
 & & \cdots & 0 & & 
 \end{array}$$

と写されているとする. このとき  $y_1 \in Y_1, x_2 \in X_2, y_2 \in Y_2$  が存在し

$$\begin{array}{ccccc}
 y_1 & \xrightarrow{g_1} & z_1 & \xrightarrow{h_1} & 0 \\
 \downarrow \eta & & \downarrow \zeta & & \\
 x_2 & \xrightarrow{f_2} & y_2 & \xrightarrow{g_2} & 0
 \end{array}$$

となる.

**証明**  $Z_1$  での完全性より, ある  $y_1 \in Y_1$  が存在して  $g_1(y_1) = z_1$  となる.  $y_2 = \eta(y_1)$  とおく.  $g_2(y_2) = \zeta(g_1(y_1)) = 0$  より  $y_2 \in \text{Ker } g_2 = \text{Im } f_2$ . よってある  $x_2 \in X_2$  が存在し  $f_2(x_2) = y_2$  となる.  $\square$

補題 6 中の一つ目の図式と仮定を満たす元の組を  $(Y_1, Z_1, W_1; X_2, Y_2, Z_2 : z_1)$ , 得られる元の組を  $(y_1, x_2, y_2)$  と書くことにする.



## 補題 7.

各行が完全列な加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 \\
 \downarrow \xi & & \downarrow \eta & & \\
 X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & & 
 \end{array}$$

において元が

$$\begin{array}{ccccc}
 x_1 & \cdots & y_1 & \xrightarrow{g_1} & z_1 \\
 \downarrow \xi & & \downarrow \eta & & \\
 x_2 & \xrightarrow{f_2} & y_2 & & 
 \end{array}$$

と写されているとする。このとき

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots & y_1 - f_1(x_1) & \xrightarrow{g_1} z_1 \\
 \vdots & \downarrow \eta & \\
 \cdots & 0 & 
 \end{array}$$

となる。

**証明**  $g_1(y_1 - f_1(x_1)) = g_1(y_1) - g_1(f_1(x_1)) = g_1(y_1) = z_1$  と  $\eta(y_1 - f_1(x_1)) = \eta(y_1) - \eta(f_1(x_1)) = \eta(y_1) - f_2(\xi(x_1)) = 0$  よりしたがう。  $\square$

補題 7 中の一つ目の図式と仮定を満たす元を合わせて  $(X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2 : x_1, y_1)$  と書くことにする。

完全性の証明に移る。  $\text{Ker } \gamma_1, \text{Coker } \beta_2$  での完全性のみ調べる。他も同様に調べられる。まず  $\text{Ker } \gamma_1$  について。元の図式の完全性から  $h_1' \circ g_1' = 0$  ゆえ  $\text{Im } g_1' \subseteq \text{Ker } h_1$ 。逆の包含を補題 6, 7 を用いて示す。  $c_1 \in \text{Ker } h_1' = \text{Ker } h_1 \cap \text{Ker } \gamma_1$  を任意にとる。補題 6 を図式  $(B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2 : c_1)$  に用いて  $(b_1, a_2, b_2)$  を得る。  $b_2 \in \text{Im } \beta_1 = \text{Ker } \beta_2$  であるので再び補題 6 を図式  $(A_2, B_2, C_2; 0, A_3, B_3 : b_2)$  に用いて  $(0, a_2, a_3)$  を得る。  $0$  の像ゆえ  $a_3 = 0$ 。よって  $a_2 \in \text{Ker } \alpha_2 = \text{Im } \alpha_1$ 。  $a_1 \in \alpha_1^{-1}(a_2)$  を一つとる。補題 7 を図式  $(A_1, B_1, C_1; A_2, B_2 : a_1, b_1)$  に用いて  $b_1 - f_1(a_1) \in g_1^{-1}(c_1) \cap \text{Ker } \beta_1 = h_1'^{-1}(c_1)$  を得る。よって  $c_1 \in \text{Im } g_1'$  であり、したがって  $\text{Im } g_1' \supseteq \text{Ker } h_1'$ 。(図 8)

$$\begin{array}{ccccccc}
& A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D_2 & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 & & \\
0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & C_3 & \xrightarrow{h_3} & D_3 & \\
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & \xrightarrow{f_1} & b_1 & \xrightarrow{g_1} & c_1 & \xrightarrow{h_1} & 0 & \cdots \\
\downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \vdots & \\
\cdots & a_2 & \xrightarrow{f_2} & b_2 & \xrightarrow{g_2} & 0 & \cdots & \\
\downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \vdots & & \vdots & \\
0 \longrightarrow & a_3 = 0 & \xrightarrow{f_3} & 0 & \cdots & & \cdots & 
\end{array}$$

図 8.

次に  $\text{Coker } \beta_2$  について. 元の図式の完全性より  $g_3' \circ f_3' = 0$  ゆえ  $\text{Im } f_3' \subseteq \text{Ker } g_3'$ . 逆の包含を補題 6,7 を用いて示す. (図式を転置した形で用いることに注意)  $[b_3] \in \text{Ker } g_3'$  を任意にとる.  $c_3 = g_3(b_3)$  とおく. 補題 6 を図式  $(C_2, C_3, \text{Coker } \gamma_2; D_1, D_2, D_3 : c_3)$  に用いて  $(c_2, d_1, d_2)$  を得る. (図 9)  $h_1$  は全射ゆえ  $c_1 \in h_1^{-1}(d_1)$  が存在する. 補題 7 を図式  $(C_1, C_2, C_3; D_1, D_2 : c_1, c_2)$  に用いて  $c_2' = c_2 - \gamma_1(c_1) \in \gamma_2^{-1}(c_3) \cap \text{Ker } h_2$  を得る.  $c_2' \in \text{Ker } h_2 = \text{Im } g_2$  ゆえ  $b_2 \in g_2^{-1}(c_2')$  が存在する. (図 10) 再び補題 7 を図式  $(B_2, B_3, \text{Coker } \beta_2; C_2, C_3 : b_2, b_3)$  に用いて  $b_3' = b_3 - \beta_2(b_2) \in \pi_B^{-1}([b_3]) \cap \text{Ker } g_3$  を得る. (図 11)  $b_3' \in \text{Ker } g_3 = \text{Im } f_3$  ゆえ  $a_3 \in f_3^{-1}(b_3')$  が存在する.  $f_3'([a_3]) = [f_3(a_3)] = [b_3]$  ゆえ  $[b_3] \in \text{Im } f_3'$ . したがって  $\text{Im } f_3' \supseteq \text{Ker } g_3'$ .  $\square$

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 & & \\
0 \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D_2 & \longrightarrow 0 \\
\downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 & & \\
0 \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & C_3 & \xrightarrow{h_3} & D_3 & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow \pi_B & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \text{Coker } \alpha_2 & \xrightarrow{f_3'} & \text{Coker } \beta_2 & \xrightarrow{g_3'} & \text{Coker } \gamma_2 & \xrightarrow{h_3'} & \text{Coker } \delta_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & c_1 & \xrightarrow{h_1} & d_1 & \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 & \\
 & & & c_2 & \xrightarrow{h_2} & d_2 & \\
 & & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 & \\
 & & b_3 & \xrightarrow{g_3} & c_3 & \xrightarrow{h_3} & 0 \\
 & & \downarrow \pi_B & & \downarrow \pi_C & & \\
 & & [b_3] & \xrightarrow{g_3'} & 0 & & 
 \end{array}$$

図 9.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & b_2 & \xrightarrow{g_2} & c_2' & \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow \gamma_2 & & & \\
 & & b_3 & \xrightarrow{g_3} & c_3 & & \\
 & & \downarrow \pi_B & & & & \\
 & & [b_3] & & & & 
 \end{array}$$

図 10.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_3 & \xrightarrow{f_3} & b_3' & \xrightarrow{g_3} 0 \\
 & & & \downarrow \pi_A & & \downarrow \pi_B & \\
 & & [a_3] & \xrightarrow{f_3'} & [b_3] & & 
 \end{array}$$

図 11.

補題 6,7 を繰り返し用いることで, この証明と同様に一般の  $n$  でも示せることを指摘しておく.

### 2.3 $d$ の定義

$d$  の定義を与えるために, まず次のように写像を定める.

**命題 12.**

各行, 各列が完全列である加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \\
 & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \zeta_1 & \\
 X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Z_2 \\
 & \downarrow \eta_2 & & \downarrow \zeta_2 & \\
 & Y_3 & \xrightarrow{g_3} & Z_3 & 
 \end{array}$$

に対して

$$\widetilde{Z}_2 = (\text{Im } g_2 \cap \text{Im } \zeta_1) / \text{Im}(\zeta_1 \circ g_1), \quad \widetilde{Y}_3 = (\text{Ker } g_3 \cap \text{Im } \eta_2) / \text{Im}(\eta_2 \circ f_2)$$

とする.  $\phi: \widetilde{Z}_2 \rightarrow \widetilde{Y}_3$  を,  $[z_2] \in \widetilde{Z}_2$  に対して  $y_2 \in g_2^{-1}(z_2)$  を用いて,  $\phi([z_2]) = [\eta_2(y_2)] \in \widetilde{Y}_3$  とすることで定める.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{---} & \\
 & \vdots & \\
 & \text{---} & \\
 & y_2 & \xrightarrow{g_2} z_2 \\
 & \downarrow \eta_2 & \searrow \\
 \eta_2(y_2) & \text{---} & [z_2] \\
 & \searrow & \uparrow \phi \\
 & [\eta_2(y_2)] & 
 \end{array}$$

$\phi$  は well-defined で加群の準同型である.

**証明** well-defined であることを見る. まず  $z_2 \in \text{Im } \zeta_1 = \text{Ker } \zeta_2$  ゆえ  $g_3(\eta_2(y_2)) = \zeta_2(z_2) = 0$ . よって  $\eta_2(y_2) \in \text{Ker } g_3$  ゆえ  $[\eta_2(y_2)] \in \widetilde{Y}_3$  である. 次に  $y_2 \in Y_2$  の取り方の任意性について.  $y_2, y'_2 \in g_2^{-1}(z_2)$  とする.  $y_2 - y'_2 \in \text{Ker } g_2 = \text{Im } f_2$  より

$$\eta_2(y_2) - \eta_2(y'_2) = \eta_2(y_2 - y'_2) \in \text{Im}(\eta_2 \circ f_2).$$

よって  $[\eta_2(y_2)] = [\eta_2(y'_2)]$ . 最後に  $z_2 \in Z_2$  の取り方の任意性について.  $[z_2] = [z'_2] \in \widetilde{Z}_2$  であるとする. ある  $y_1 \in Y_1$  が存在して  $\zeta_1 \circ g_1(y_1) = z_2 - z'_2$  となる.  $y_2 \in g_2^{-1}(z_2), y'_2 \in g_2^{-1}(z'_2)$  をとる.  $y_2 - y'_2 - \eta_1(y_1) \in \text{Ker } g_2 = \text{Im } f_2$  ゆえ,

$$\begin{aligned} \eta_2(y_2) - \eta_2(y'_2) &= \eta_2(y_2) - \eta_2(y'_2) - \eta_2(\eta_1(y_1)) \\ &= \eta_2(y_2 - y'_2 - \eta_1(y_1)) \in \text{Im}(\eta_2 \circ f_2). \end{aligned}$$

よって  $[\eta_2(y_2)] = [\eta_2(y'_2)]$ . したがって  $\phi$  は well-defined である. 準同型であることは定め方よりしたがう.  $\square$

命題 12 中の図式を  $(Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; Y_3, Z_3)$  と書くことにする.

$d : \text{Ker } \delta_1 \rightarrow \text{Coker } \alpha_2$  を定義する. まず命題 12 を図式

$$\begin{aligned} &(\text{Ker } \gamma_1, \text{Ker } \delta_1; B_1, C_1, D_1; C_2, D_2), \\ &(B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; B_3, C_3), \\ &(A_2, B_2; 0, A_3, B_3; \text{Coker } \alpha_2, \text{Coker } \beta_2) \end{aligned}$$

に用いて写像  $\phi_D : \widetilde{D}_1 \rightarrow \widetilde{C}_2$ ,  $\phi_C : \widetilde{C}_2 \rightarrow \widetilde{B}_3$ ,  $\phi_B : \widetilde{B}_3 \rightarrow \widetilde{\text{Coker } \alpha_2}$  を得る. ここで  $\text{Im}(0 \rightarrow A_3 \rightarrow \text{Coker } \alpha_2) = 0$  ゆえ  $\widetilde{\text{Coker } \alpha_2} \subseteq \text{Coker } \alpha_2$  であることに注意する.  $p : \text{Ker } \delta_1 \rightarrow \widetilde{D}_1$  を包含写像と射影を合成したもの,  $i : \widetilde{\text{Coker } \alpha_2} \rightarrow \text{Coker } \alpha_2$  を包含写像とする. これらを用いて  $d = i \circ \phi_B \circ \phi_C \circ \phi_D \circ p$ , すなわち

$$\text{Ker } \delta_1 \xrightarrow{d} \text{Coker } \alpha_2 = \text{Ker } \delta_1 \xrightarrow{p} \widetilde{D}_1 \xrightarrow{\phi_D} \widetilde{C}_2 \xrightarrow{\phi_C} \widetilde{B}_3 \xrightarrow{\phi_B} \widetilde{\text{Coker } \alpha_2} \xrightarrow{i} \text{Coker } \alpha_2$$

と定める.  $\phi_D$  の余域としての  $\widetilde{C}_2$  と,  $\phi_C$  の定義域としての  $\widetilde{C}_2$  は同じとは限らないが,  $C_2$  での行の完全性より

$$\text{Codom } \phi_D = (\text{Im } g_2 \cap \text{Im } \gamma_1) / \text{Im}(\gamma_1 \circ g_1) = (\text{Ker } h_2 \cap \text{Im } \gamma_1) / \text{Im}(\gamma_1 \circ g_1) = \text{Dom } \phi_C$$

となり, 一致する.  $\widetilde{B}_3$  についても同様で, ゆえに合成は well-defined である. 一般の  $n$  でも同様に定義できることを指摘しておく. 具体的には  $d_1 \in \text{Ker } \delta_1$  の像  $d(d_1) = [a_3]$  は,

$$d_1 \mapsto p(d_1) = [d_1] \mapsto \phi_D([d_1]) = [c_2] \mapsto \phi_C([c_2]) = [b_3] \mapsto \phi_B([b_3]) = [a_3]$$

と辿ることで得られる. しかしこれでは, どの様に像が決定されているのかよく分からない. そこで命題 12 の  $\phi$  の定義を思い出し同値類でなく代表元に注目すれば, 図 14 のように

$$d_1 \longrightarrow c_1 \longrightarrow c_2 \longrightarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longrightarrow a_3 \longrightarrow [a_3]$$

と, 像を取る操作と逆像の中から元を取る操作を繰り返すことで得られる. このように  $d_1$  の  $d$  による像  $[a_3]$  を得る操作は, もちろん途中の元の取り方によらない.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & \text{Ker } \gamma_1 & \xrightarrow{h_1'} & \text{Ker } \delta_1 \\
& & & & \downarrow \iota_C & & \downarrow \iota_D \\
& A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D_1 & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \delta_1 & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D_2 & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \delta_2 & & \\
0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{f_3} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & C_3 & \xrightarrow{h_3} & D_3 & \\
& \downarrow \pi_A & & \downarrow \pi_B & & & & & & \\
& & & & \text{Coker } \alpha_2 & \xrightarrow{f_3'} & \text{Coker } \beta_2 & & & 
\end{array}$$

図 13.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & \text{---} & d_1 \\
& & & & & \vdots & \downarrow i_D \\
& & & & & c_1 & \xrightarrow{h_1} & d_1 & \text{---} \\
& & & & & \vdots & \downarrow \gamma_1 & & \vdots \\
& & & & & b_2 & \xrightarrow{g_2} & c_2 & \text{---} \\
& & & & & \vdots & \downarrow \beta_2 & & \vdots \\
& & & & & a_3 & \xrightarrow{f_3} & b_3 & \text{---} \\
& & & & & \vdots & \downarrow \pi_A & & \vdots \\
& & & & & [a_3] & \text{---} & & 
\end{array}$$

図 14.

## 2.4 $\text{Ker } \delta_1, \text{Coker } \alpha_2$ での完全性

順に  $\text{Ker } \delta_1, \text{Coker } \alpha_2$  での完全性を示す.

### $\text{Ker } \delta_1$ での完全性

図 14 のようにして  $d_1 \in \text{Ker } \delta_1$  の  $d$  による像  $[a_3] \in \text{Coker } \alpha_2$  が決まっているとする.

$d_1 \in \text{Im } h_1'$  とすると, ある  $c_1' \in \text{Ker } \gamma_1$  が存在して  $h_1'(c_1') = d_1$ , すなわち  $h_1(c_1') = d_1$  となる. well-definedness より  $c_1 = c_1'$  として良い, つまり  $c_1 \in \text{Ker } \gamma_1$  と取れる. よって  $c_2 = 0$  となる. 同様に  $b_2 = 0, b_3 = 0, a_3 = 0$  として取れ, したがって  $[a_3] = 0$  となる. よって  $d_1 \in \text{Ker } d$ . ゆえに  $\text{Im } h_1' \subseteq \text{Ker } d$ .

逆の包含を示す.  $d_1 \in \text{Ker } d$ , すなわち  $[a_3] = 0$  とする.  $a_3 \in \text{Ker } \pi_A = \text{Im } \alpha_2$  ゆえ  $a_2 \in \alpha_2^{-1}(a_3)$  が存在する. 補題 7 を図式  $(A_2, B_2, C_2; A_3, B_3 : a_2, b_2)$  に用いると,  $\beta_2(b_2 - f_2(a_2)) = 0, g_2(b_2 - f_2(a_2)) = c_2$  と分かる. よって well-definedness より,  $b_2 \rightarrow b_2 - f_2(a_2), b_3 \rightarrow 0, a_3 \rightarrow 0$  と置き換えることを考え  $b_2 \in \text{Ker } \beta_2, b_3 = 0, a_3 = 0$  と取ることができる.  $b_3 = 0$  としたのでもう一度同様の議論ができ,  $c_1 \in \text{Ker } \gamma_1, c_2 = 0, b_2 = 0$  と取ることができる. これより  $h_1(c_1) = d_1, c_1 \in \text{Ker } \gamma_1$  となる  $c_1 \in C_1$  が取れたので,  $d_1 \in \text{Im } h_1'$ . よって  $\text{Im } h_1' \supseteq \text{Ker } d$ .  $\square$

### $\text{Coker } \alpha_2$ での完全性

図 14 のようにして  $d_1 \in \text{Ker } \delta_1$  の  $d$  による像  $[a_3] \in \text{Coker } \alpha_2$  が決まっているとする.  $f_3'([a_3]) = [f_3(a_3)] = [\beta_2(b_2)] = 0$  ゆえ  $f_3'(d(d_1)) = 0$ . よって  $\text{Im } d \subseteq \text{Ker } f_3'$ .

逆の包含を示す.  $[a_3] \in \text{Ker } f_3'$  とする. (ここでは図 14 のようになっているとは限らないことに注意せよ. むしろ図 14 を満たすように元が取れることを示す) 図 13 の第 1 列に  $\text{Coker } \alpha_2 \rightarrow 0$  を加えるとこれは再び完全列. 補題 6 を図式  $(A_3, \text{Coker } \alpha_2, 0; B_2, B_3 : \text{Coker } \beta_2 : [a_3])$  に用いて  $(a_3, b_2, b_3)$  を得る.  $b_3 \in \text{Ker } \pi_B \cap \text{Im } f_3 = \text{Ker } \pi_B \cap \text{Ker } g_3$  ゆえ, 再び補題 6 を図式  $(B_2, B_3, \text{Coker } \beta_2; C_1, C_2, C_3 : b_3)$  に用いて  $(b_2, c_1, c_2)$  を得る. 同様に補題 6 を図式  $(C_1, C_2, C_3; \text{Ker } \delta_1, D_1, D_2 : c_2)$  に用いて  $(c_1, d_1, d_2)$  を得る.  $[a_3], a_3, b_3, b_2, c_2, c_1, d_1$  は図 14 を満たす. よって  $d(d_1) = [a_3]$  ゆえ  $[a_3] \in \text{Im } d$ . したがって  $\text{Im } d \supseteq \text{Ker } f_3'$ .  $\square$

同様の議論で一般の  $n$  でも示すことができることを指摘しておく.

以上で一般化蛇の補題の  $n = 3$  の場合の証明が完了した. さらに与えた証明を詳細に追うことで, 何度か指摘したように一般の  $n$  でも同様の議論ができること, そしてそれによって一般化蛇の補題の証明が与えられることが分かるだろう.

## 3 $n^2$ 項補題

$n^2$  項補題を示すため, まず簡単な補題を示す.

**補題 15.**

次の加群の可換図式において,  $\alpha, \beta, \gamma$  が同型で行の一方が完全列なら他方も完全列である.

$$\begin{array}{ccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2
 \end{array}$$

**証明** 第 1 行が完全列であるときに示せば十分である.  $\text{Im } f_2 = \text{Im}(\beta \circ f_1 \circ \alpha^{-1}) = \beta(\text{Im } f_1) = \beta(\text{Ker } g_1) = \beta(\text{Ker } \gamma \circ g_1) = \beta(\text{Ker } g_2 \circ \beta) = \text{Ker } g_2$ . よって第 2 行は完全列である.  $\square$

補題 15 と一般化蛇の補題を用いて  $n^2$  項補題を示す.

**定理 16.  $n^2$  項補題**

下図のような, 0 を無視すると  $n \times n$  の格子状になる加群の可換図式を考える. 各列は完全列であるとする.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & A_{1,1} & \longrightarrow & A_{1,2} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow A_{1,3} \longrightarrow A_{1,n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & \downarrow \alpha_n \\
 0 & \longrightarrow & A_{2,1} & \longrightarrow & A_{2,2} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow A_{2,3} \longrightarrow A_{2,n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \beta_3 & \downarrow \beta_n \\
 \vdots & & \downarrow \vdots & & \downarrow \vdots & & \downarrow \vdots & \downarrow \vdots & \vdots \\
 & & \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 & \downarrow \gamma_n \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1,1} & \longrightarrow & A_{n-1,2} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow A_{n-1,3} \longrightarrow A_{n-1,n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \delta_3 & \downarrow \delta_n \\
 0 & \longrightarrow & A_{n,1} & \longrightarrow & A_{n,2} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow A_{n,3} \longrightarrow A_{n,n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & \cdots & 0 & 0
 \end{array}$$

このとき, 次が成り立つ.

1. 第 2 行から第  $n$  行がすべて完全列なら, 第 1 行も完全列.
2. 第 1 行から第  $n-1$  行がすべて完全列なら, 第  $n$  行も完全列.



**証明**  $n = 2$  なら, 各列が完全列であることから  $\alpha_1, \alpha_2$  が同型になり, 補題 15 より主張がしたがう. 以下  $n \geq 3$  とする.

1 について.  $\delta_1$  が全射ゆえ  $\text{Coker } \delta_1 = 0$  であるので, 第 2 行から第  $n$  行に一般化蛇の補題を用いると図 17 の第 2 行が完全列として得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{1,1} & \longrightarrow & A_{1,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_{1,n} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \beta_1 & \longrightarrow & \text{Ker } \beta_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \text{Ker } \beta_n & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

図 17.

$i = 1, \dots, n$  に対して,  $\alpha_i$  の単射性と  $A_{2,i}$  での列の完全性より,  $\alpha_i$  は同型  $A_{1,i} \cong \text{Im } \alpha_i = \text{Ker } \beta_i$  を与える. 図 17 の第 1 行を元の図式の第 1 行, 垂直方向の写像を  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (が誘導する同型) と自明な同型  $0 \rightarrow 0$  とすると, 元の図式の可換性より図 17 は可換図式である. したがって補題 15 より元の図式の第 1 行は完全列である.

2 について.  $A_{1,n}$  での列の完全性から  $\text{Ker } \alpha_n = 0$  であるので, 第 1 行から第  $n-1$  行に一般化蛇の補題を用いると図 18 の第 1 行が完全列として得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Coker } \gamma_1 & \longrightarrow & \text{Coker } \gamma_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \text{Coker } \gamma_n & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{1,1} & \longrightarrow & A_{1,2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A_{1,n} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

図 18.

$i = 1, \dots, n$  に対して,  $\delta_i$  が全射であり  $A_{n-1,i}$  で列が完全なので, 準同型定理から  $\delta_i$  は  $\text{Coker } \gamma_i \cong A_{n,i}$  を誘導する. 図 18 の第 2 行を元の図式の第  $n$  行, 垂直方向の写像を  $\delta_1, \dots, \delta_n$  が誘導する同型と自明な同型  $0 \rightarrow 0$  とすると, 元の図式の可換性より図 18 は可換図式である. したがって補題 15 より元の図式の第  $n$  行は完全列である.

以上より  $n^2$  項補題が示された. □

## 4 おわりに

$d$  の定義が一般化蛇の補題の証明の肝であったように思う. これは命題 12 によりうまく解決することができた. 証明を終えて, 得られた  $d$  よりも, むしろ命題 12 中の  $\widetilde{Z}_2, \widetilde{Y}_3$  や  $\phi$  などが本質的に重要な対象であるように思う. 命題 12 で行ったように完全列, あるいはより広く可換図式から新たな対象や射を創り出す関手について考えても面白いかもしれない.

最後に, 問題を考えるきっかけをくださり, また証明をまとめるよう助言して下さった K 先生に, 感謝申し上げます.