一位の極の留数の計算方法

真中遥道
@GirlwithAHigoi

最終更新：2023 年 8 月 1 日

院試対策のゼミで，ゼミのメンバーの一人が一位の極の留数の簡単な計算方法を見つけたので，それについてまとめる．

簡潔に述べれば次が成り立つ．

定理 1.

$D \subseteq \mathbb{C}$ を領域，f を $\alpha \in D$ を一位の極に持つ $D \setminus \{\alpha\}$ 上の正則関数とする．このとき，$1/f$ は α のある開近傍上正則で，

$$\mathrm{Res}(f, \alpha) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{f(z)} \right)^{-1} \Bigg|_{z=\alpha}$$

が成り立つ．（$^{-1}$ は逆数）

証明. $f \neq 0$ ゆえ一致の定理より，ある α の開近傍 $U \subseteq D$ が存在し，$z \in U$ なら $f(z) \neq 0$ となる．U 上の関数 g を

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & (z \neq \alpha) \\ 0 & (z = \alpha) \end{cases}$$

により定義する．f が α を一位の極に持つため

$$\frac{z-\alpha}{g(z)-g(\alpha)} = \frac{z-\alpha}{1/f(z)-0} = (z-\alpha)f(z)$$

は $z \to \alpha$ で 0 でない有限値に収束する．（0 に収束するならば，α は除去可能特異点となり位数 1 の極ではなくなる）よって g は $\alpha \in U$ で微分可能．したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, \alpha) &= \lim_{z \to \alpha} (z-\alpha) f(z) \\ &= \lim_{z \to \alpha} \frac{z-\alpha}{\frac{1}{f(z)}} \\ &= \lim_{z \to \alpha} \frac{z-\alpha}{g(z)-g(\alpha)} \\ &= \frac{1}{g'(\alpha)}. \end{aligned}$$

$1/f$ を g で定めれば主張が従う． $\square$

注意 2. テストでこの計算方法を使う場合，その計算過程を解答に記述するのは面倒である．メモに今回紹介した方法で留数を計算し，解答ではさも定義に従って求めたかのような記述をするのが良いだろう．

いくつか例を見て，演習問題へと進む．

例 3. $f(z) = 1/(z-1)$ の 1 での留数は明らかに 1 であるが，定理 1 により求めると，

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{1/(z-1)} \bigg|_{z=1} \right)^{-1} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z-1) \bigg|_{z=1} \right)^{-1} = 1$$

となり，これは確かに正しい．

例 4. $f(z) = 1/(z^2+z+1)$ の $\exp(2\pi i/3)$ での留数を定理 1 により求めると，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, \exp(2\pi i/3)) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{1/(z^2+z+1)} \bigg|_{z=\exp(2\pi i/3)} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(z^2+z+1\right) \bigg|_{z=\exp(2\pi i/3)} \right)^{-1} \\
&= \left((2z+1) \bigg|_{z=\exp(2\pi i/3)} \right)^{-1} \\
&= -\frac{i}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

定義通り計算すれば，$\omega = \exp(2\pi i/3)$ とおいて，

$$\operatorname{Res}(f, \omega) = \lim_{z \to \omega} \frac{z-\omega}{z^2+z+1} = \frac{1}{\omega - \overline{\omega}} = \frac{1}{2i \operatorname{Im}(\omega)} = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

となり，正しいことが確かめられる．

演習 5.

$f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{1+z^2+z^4}$ の一位の極 $\zeta := \exp(2\pi i/6)$ における留数を求めよ．

（参考：京大院　理・数学　2018 年度　院試 [1]）

（解答）

$$\lim_{z \to \zeta} (z-\zeta) f(z) = e^{i\pi\zeta} \lim_{z \to \zeta} \frac{z-\zeta}{1+z^2+z^4} = e^{i\pi\zeta} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2+z^4}, \zeta \right)$$

より，$\operatorname{Res}((1+z^2+z^4)^{-1}, \zeta)$ を求める．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(1+z^2+z^4\right) \bigg|_{z=\zeta} = 2\zeta + 4\zeta^3 = 1 + \sqrt{3}i - 4 = -3 + \sqrt{3}i.$$

これと定理 1 より

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^2+z^4},\zeta\right)=\frac{1}{-3+\sqrt{3}i}=-\frac{3+\sqrt{3}i}{27}.$$

また,

$$e^{i\pi\zeta}=\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi i\right)=i\exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right).$$

したがって

$$\mathrm{Res}(f,\zeta)=\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\frac{\sqrt{3}-3i}{27}.$$

参考文献

[1] “過去の入試問題”．京都大学大学院理学研究科／理学部数学教室．https://www.math.kyoto-u.ac.jp/files/master_exams/2017math_kiso.pdf